Universidade do Minho
Instituto de Estudos da Criança

Ana Cristina Coelho Barbosa

A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico

Setembro de 2009

A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico

Ana Cristina Coelho Barbosa

UMinho|2009

Universidade do Minho
Instituto de Estudos da Criança

Ana Cristina Coelho Barbosa

A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico

Dissertação de Doutoramento em Estudos da Criança
Área de Conhecimento em Matemática Elementar

Trabalho efectuado sob a orientação do
Professor Doutor Pedro Manuel Baptista Palhares
e da
Professora Doutora Maria Isabel Piteira do Vale

Setembro de 2009

AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento deste trabalho só foi possível com o apoio de diferentes pessoas e instituições que contribuíram de forma significativa para a sua concretização. Neste sentido não poderia deixar de agradecer:

- ao Professor Doutor Pedro Palhares, pela sua orientação e pelas suas sugestões e contributos;
- à Professora Doutora Isabel Vale que, para além de ter orientado este trabalho, acompanhou todo o meu percurso profissional e académico ao longo destes quatro anos, mostrando um apoio incondicional;
- aos Professores e alunos intervenientes no estudo, pela forma como me receberam nas suas aulas e pela colaboração e disponibilidade mostradas, tornando possível a realização deste estudo;
-às Escolas onde a investigação decorreu que criaram as condições necessárias à sua implementação;
- à Fundação para a Ciência e Tecnologia pelo financiamento concedido a esta investigação;
- à minha família, aos meus amigos e colegas pelas palavras de encorajamento;
- por fim, ao António, à Maria e ao Zé pela compreensão, carinho e dedicação que sempre demonstraram durante toda a vida e, em especial, ao longo destes quatro anos.

A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico

RESUMO

A resolução de problemas constitui uma capacidade matemática fundamental e simultaneamente uma abordagem privilegiada para a aprendizagem de diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos. É, por isso, preocupante o insucesso apresentado pelos nossos alunos, no que refere à resolução de problemas, tanto nas aulas de Matemática como em estudos de avaliação nacionais e internacionais. As tarefas que envolvem a exploração de padrões proporcionam um maior envolvimento dos alunos na actividade matemática, promovendo a utilização de um raciocínio organizado, baseado na formulação e teste de conjecturas, na generalização e na argumentação, o que pode contribuir para que melhorem a capacidade de resolver situações problemáticas. Por outro lado, é fundamental na resolução de problemas que os alunos apresentem um raciocínio flexível, sendo capazes de compreender e utilizar diferentes tipos de estratégias, quer visuais quer analíticas. No entanto, a componente visual é frequentemente negligenciada nas aulas de Matemática, fazendo com que os alunos privilegiem contextos numéricos.

Neste sentido, o presente estudo pretende compreender o modo como alunos do 6.º ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais, tendo-se, para isso, definido as seguintes questões de investigação: (1) Como se caracterizam as estratégias de generalização aplicadas pelos alunos e de que forma são utilizadas?; (2) Que dificuldades ou erros emergem do seu trabalho?; (3) Qual o papel da visualização no desempenho dos alunos?; e (4) Qual o impacto da resolução de problemas com padrões, em contextos visuais, na capacidade de os alunos generalizarem?

Para concretizar a investigação utilizou-se uma metodologia de natureza mista, na qual se privilegiou a vertente qualitativa baseada em quatro estudos de caso. O estudo de carácter longitudinal foi desenvolvido durante o ano lectivo 2006/2007, com duas turmas do 6.º ano de escolaridade. A recolha de dados incidiu sobre os alunos destas turmas em geral e, em particular, em dois pares de alunos de cada turma. Como principais fontes de recolha de dados privilegiou-se a observação, entrevistas realizadas aos alunos-caso,

registos áudio e vídeo do trabalho realizado na aula e das entrevistas e uma diversidade de documentos, dos quais se destacam as folhas de resolução das tarefas exploradas e dos testes implementados, no início e no final do estudo, notas de campo e alguns documentos oficiais cedidos pelas escolas.

A análise dos dados permitiu verificar que tarefas centradas na exploração de padrões visuais conduziram os alunos à utilização de uma grande diversidade de estratégias de generalização. Apesar desta diversidade, houve estratégias que os alunos aplicaram com maior frequência do que outras, normalmente as de natureza visual. Em geral, os alunos compreenderam as potencialidades das diferentes estratégias exploradas e em que situações seriam úteis, no entanto, em alguns casos em que deveriam descobrir valores distantes numa sequência recorreram a generalizações aritméticas, usando estratégias aditivas.

Identificou-se que há alguns factores que podem condicionar a selecção das estratégias por parte dos alunos e potenciar a emergência de algumas dificuldades. Por exemplo, foi notório que normalmente recorreram a abordagens de tipo diferente quando tinham de determinar termos próximos e termos distantes, ou quando estavam perante um padrão de tipo linear ou não linear. Foi ainda evidente que as dificuldades com alguns tópicos matemáticos, geralmente no âmbito da geometria, condicionaram a adequação das estratégias aplicadas. Na análise das dificuldades sentidas, verificou-se também que o trabalho em contextos puramente numéricos conduziu a alguns erros, como a junção de variáveis diferentes ou a utilização indevida da proporcionalidade directa. Revelaram muitas dificuldades no recurso a linguagem apropriada para a descrição de regras, apoiando-se frequentemente em casos particulares que tinham estudado. É ainda pertinente destacar que nem sempre conseguiram formular relações de tipo funcional, geralmente com padrões de tipo não linear ou então quando a figura não permitia *ver* directamente a estrutura do padrão.

Os resultados do estudo revelam ainda que a visualização foi útil sempre que os alunos conseguiram analisar a estrutura do padrão como uma configuração de objectos relacionados entre si por uma propriedade invariante. Nos casos em que as figuras foram interpretadas como um todo não foram capazes de identificar uma regra.

Em termos gerais, a comparação dos resultados do pré-teste e do pós-teste permitiram concluir que houve uma evolução significativa no desempenho dos alunos ao nível da generalização.

Problem solving involving generalization of visual patterns: a longitudinal study with 6^{th} grade students

ABSTRACT

Problem solving is a fundamental mathematical ability and simultaneously an approach for learning various concepts, representations and mathematical procedures. Therefore, it is distressing that our students perform badly when solving problems, both in mathematics classrooms and in national and international assessment studies. Pattern exploration tasks contribute to a greater involvement of students in mathematical activity, promoting the use of an organized thinking, based on conjecturing, generalizing and argumentation, which can contribute to the improvement of problem solving abilities. On the other hand, it is essential, when solving problems is involved, that students develop a flexible reasoning, being able to understand and use different types of strategies, either visual or analytical. However, the visual component of mathematics is often neglected by teachers, so students tend to use numerical contexts.

This study seeks to understand how 6^{th} grade students solve problems involving the generalization of visual patterns, and considers the following research questions: (1) How can we characterize students' generalization strategies and how are they used?, (2) What difficulties or errors emerge from their work?, (3) What's the role of visualization in their performance?; and (4) What's the impact of solving problems centered on visual patterns in the ability of students to generalize?

This research follows a mixed methodology, privileging a qualitative approach based on four case studies. The study had a longitudinal nature, developed during the 2006/2007 school year, with two 6^{th} grade classes. In general, data collection focused on students of each of the classes and, in particular, in two pairs of students of each class. The main data collection instruments and procedures were observation, interviews with the case studies, audio and video records of the work developed in class and from interviews, and a variety of documents, among which are the tasks and the tests solved by the participants, field notes and some official documents, collected on the schools involved.

Data analysis has shown that tasks centered on the exploration of visual patterns led students to the use of a wide range of generalization strategies. Despite this diversity, there were strategies that students applied more frequently than others, usually of visual nature. In general, students understood the potential of the different strategies explored and recognized the situations in which they were more useful. However, in certain cases, where they had to find distant values in a sequence, some students applied arithmetic generalizations, using additive strategies.

It was identified that some factors influence the selection of strategies by students and enhance the appearance of some difficulties. For example, it was clear that normally students used different approaches to determine near and distant terms of a sequence, or when they were dealing with a linear or a nonlinear pattern. It was also clear that the difficulties with some mathematical topics, normally geometric ones, conditioned the adequacy of the strategies implemented. In analyzing the difficulties it was also found that the work developed in purely numerical contexts led to some errors, such as the mixing of different variables or the improper use of direct proportion. Students also revealed many difficulties in the use of appropriate language in the description of rules, often relying on particular cases. It is also relevant to point out that they weren't always able to formulate a functional relation, usually with nonlinear patterns or when the figure didn't allow them to *see* directly the structure of the pattern.

Study results also reveal that visualization was helpful when students were able to analyze the structure of the pattern as a configuration of objects related to each other by an invariant property. In the cases where the figures were interpreted as a whole, they weren't capable of identifying a rule.

In general, the comparison of the results from the pre-test and the post-test showed that there was significant progress in student performance concerning generalization.

ÍNDICE

ABREVIATURAS

APM – Associação de Professores de Matemática

DEB – Departamento de Educação Básica

DGEBS – Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário

DGIDC – Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular

ICMI – International Comission on Mathematics Instruction

IIE – Instituto de Inovação Educacional

INCM – Imprensa Nacional Casa da Moeda

ME – Ministério da Educação

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

NRC – National Research Council

OCDE – Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico

PISA – Programme for International Student Assessment

SIAEP – Second International Assessment of Educational Progress

TIMSS – Trends in International Mathematics and Science Study

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo começa-se por apresentar um conjunto de considerações que orientam e contextualizam a investigação. Posteriormente é definido o problema que se pretende estudar bem com as questões que o orientam. Por fim, é feita uma síntese da estrutura organizativa da dissertação.

1.1.Orientação para o Estudo

Os objectivos delineados para a matemática escolar têm vindo a alterar-se, nestas últimas décadas, de forma a acompanhar a evolução e as necessidades da sociedade. Actualmente é exigido que os indivíduos revelem capacidade de adaptação a novas situações, estejam aptos para aprender novas técnicas e sejam capazes de resolver problemas de forma flexível, demonstrando espírito crítico e criatividade. Uma matemática centrada na resolução de exercícios rotineiros, privilegiando cálculos e procedimentos isolados, além de não responder às exigências colocadas actualmente ao sistema de ensino, não contribui para uma melhor compreensão do que é a matemática e do que significa *fazer* matemática (NCTM, 1991). Neste sentido, considera-se que a exploração de situações problemáticas envolve os alunos em momentos genuínos de actividade matemática, permitindo que se aproximem da actividade de um matemático (Polya, 1945).

Desde os anos oitenta que a resolução de problemas tem vindo a assumir um papel fundamental na matemática escolar. Nas actuais orientações curriculares, nacionais e internacionais, uma das principais finalidades do ensino da matemática é o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas (e.g. ME-DEB, 2001; ME-DGIDC, 2007; NCTM, 2000). A resolução de problemas passou a ser encarada como o eixo orientador do currículo, constituindo o contexto fundamental à construção do conhecimento matemático e contribuindo para uma matemática mais significativa. No entanto, apesar da crescente valorização da resolução de problemas em termos curriculares, os resultados apresentados pelos alunos portugueses em diversos estudos de comparação internacionais (SIAEP, 3.º TIMSS, PISA) não são animadores (Amaro, Cardoso & Reis, 1994; Ramalho, 1994; OCDE, 2004). Este insucesso poderá estar de alguma forma relacionado com a sobrevalorização do domínio de procedimentos e algoritmos e uma experiência reduzida com tarefas que envolvem o raciocínio e a resolução de problemas não rotineiros, na aula de matemática.

As tarefas que têm subjacente a exploração de padrões poderão contribuir de forma significativa para o desenvolvimento de capacidades próprias da resolução de problemas, já que implicam a análise de casos particulares, a organização de informação de forma sistemática, o estabelecimento de conjecturas e a generalização de resultados. No contexto da resolução de problemas, a procura de padrões surge como uma estratégia poderosa que deve ser trabalhada com os alunos, já que promove o desenvolvimento do raciocínio e potencia o estabelecimento de conexões entre diversas áreas da Matemática (Abrantes, Ponte, Fonseca & Brunheira, 1999). Vale, Palhares, Cabrita e Borralho (2006) referem que o trabalho com padrões possibilita uma aprendizagem mais significativa da Matemática e permite aos alunos um maior envolvimento na aprendizagem, melhorando desta forma as suas capacidades e competências. Efectivamente, a exploração de tarefas que envolvem a descoberta de padrões desafiam os alunos a recorrer a capacidades de pensamento de ordem superior, como o raciocínio e a comunicação, podendo assim contribuir para a melhoria do seu desempenho na resolução de problemas.

Nos últimos anos tem havido uma tendência de revalorização da geometria no currículo de Matemática. As ideias geométricas são úteis na representação e na resolução de problemas, em diferentes áreas da matemática e em situações em contexto real, o que fundamenta a sua relevância. Há também um forte consenso de que a geometria é uma fonte de problemas não rotineiros, que podem propiciar o desenvolvimento de capacidades relacionadas com: a visualização espacial, o raciocínio e a argumentação. A visualização em particular tem sido desde sempre considerada uma componente importante do pensamento matemático mas, segundo determinados estudos, nem sempre lhe é atribuído um papel de destaque nas experiências matemáticas dos alunos no que refere a áreas que não a geometria (e.g. Healy & Hoyles, 1996; Presmeg, 2006). O potencial das abordagens visuais raramente é explorado com o objectivo de promover uma aprendizagem significativa. A visualização não pode ser reduzida à mera produção ou observação de figuras, é fundamental que se compreenda que o seu contributo é muito mais abrangente, permitindo, por exemplo, desenvolver intuições que clarificam ideias matemáticas ou até mesmo interiorizar conceitos em diversas áreas da matemática (Dreyfus, 1991; Hershkovitz, 1990). As representações de natureza visual constituem uma estratégia incontornável na resolução de problemas, actuando frequentemente como um elemento facilitador na compreensão das situações propostas e inspirando descobertas criativas. Embora sejam apontadas diversas razões para o recurso a métodos visuais na actividade matemática, este tipo de abordagens não são muito comuns na aula de Matemática o que faz com que grande parte dos alunos apresente relutância em visualizar. Segundo Vale e Pimentel (2005), no nosso ensino é dada especial importância aos aspectos numéricos e algébricos remetendo alguns alunos, possuidores de maiores capacidades no domínio visual, para situações de insucesso escolar, e impedindo outros, com menores capacidades nesta área, de se desenvolverem harmoniosamente. O ideal seria que o professor promovesse discussões significativas, centradas na resolução de problemas, nas quais os alunos pudessem analisar abordagens de natureza diferente e verificarem a sua equivalência. Este tipo de trabalho contribui para o desenvolvimento da flexibilidade do raciocínio tornando os alunos melhores resolvedores de problemas, aptos para utilizar diferentes tipos de estratégias, visuais e analíticas, e decidir quais as que mais se adequam a cada problema.

1.2. Problema e Questões da Investigação

Tendo por base as ideias explicitadas anteriormente, nomeadamente, o insucesso apresentado pelos nossos alunos na resolução de problemas e os potenciais contributos da exploração de padrões e da utilização de abordagens visuais para o desenvolvimento daquela capacidade, o presente trabalho pretende compreender o modo como alunos do 6.º ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais.

Com o objectivo de reflectir sobre esta problemática, foi desenvolvido um estudo longitudinal, com duas turmas do 6.º ano de escolaridade, tendo sido enunciadas algumas questões orientadoras que terão por base a evolução das turmas e de alguns alunos em particular:

1. Como se caracterizam as estratégias de generalização aplicadas pelos alunos e de que forma são utilizadas?

2. Que dificuldades ou erros emergem do seu trabalho?
3. Qual o papel da visualização no desempenho dos alunos?
4. Qual o impacto da resolução de problemas com padrões, em contextos visuais, na capacidade de os alunos generalizarem?

Ao longo da investigação os alunos exploraram tarefas que requerem a procura de padrões e o estabelecimento de generalizações, em contextos visuais. Como o ensino da álgebra apenas se inicia no 3.º ciclo torna-se fundamental estudar o tipo de estratégias de generalização privilegiadas por estes alunos, na descoberta de termos próximos e distantes. Atendendo à taxa de insucesso apresentada pelos nossos alunos na resolução de problemas é também importante compreender quais as dificuldades e erros que surgem neste tipo de tarefas. Por outro lado, havendo uma forte componente visual nos problemas propostos a pertinência do estudo da influência da visualização no seu desempenho é incontornável, tentando analisar esse impacto na natureza das abordagens utilizadas e nas dificuldades sentidas. Por fim, tendo em conta que se trata de um estudo longitudinal, realizado ao longo de um ano lectivo, tenta-se ainda avaliar a influência das tarefas exploradas na capacidade de os alunos generalizarem.

1.3. Organização Geral

Esta dissertação encontra-se estruturada em catorze capítulos, destacando-se duas partes fundamentais, a fundamentação teórica e o trabalho empírico.

Depois desta *Introdução*, que constitui o Capítulo 1, segue-se a revisão de literatura sobre as temáticas associadas ao problema em estudo, na qual são apresentadas e discutidas as principais referências teóricas. A revisão de literatura é composta por quatro capítulos, referentes a áreas de investigação que enquadram este trabalho. O Capítulo 2, *O Ensino e a Aprendizagem da Matemática*, aborda aspectos gerais do ensino e da aprendizagem da matemática, tendo por base documentos curriculares e estudos documentais e empíricos no âmbito da educação matemática. O capítulo começa com uma análise da evolução das perspectivas curriculares em Matemática, dando especial atenção às actuais orientações curriculares. A crescente importância atribuída à resolução de problemas no currículo fundamenta a inclusão de uma secção na qual é feita uma abordagem à resolução de problemas como eixo orientador do ensino da matemática. Por fim, considerou-se ainda fundamental a discussão de alguns aspectos particulares associados à aula de matemática, abrangendo os papéis do professor e do aluno nos modelos de ensino ditos tradicional e actual, e analisando, em particular, a natureza das tarefas propostas em cada caso. O Capítulo 3, *A Visualização no Ensino e na Aprendizagem da Matemática*, tem início com a discussão acerca da relevância das representações em matemática, no entanto, devido aos objectivos do estudo, o enfoque passa para as representações de natureza visual. Neste sentido, procura-se clarificar o significado de visualização, abordando ainda o seu papel na aula de Matemática, discutindo as potencialidades e limitações da sua utilização, bem como a influência das preferências de pensamento no desempenho dos alunos. O Capítulo 4, *Os Padrões e a Matemática*, tem início com a apresentação das perspectivas de alguns autores acerca do conceito de padrão, de forma a encontrar uma definição adequada ao contexto deste estudo. Posteriormente, analisa-se a expressão curricular dos padrões, reflectindo de forma mais aprofundada na sua relação com a resolução de problemas e com a álgebra. No Capítulo 5, *A Generalização na Resolução de Problemas com Padrões*, e à semelhança de capítulos anteriores, começa-se por explorar algumas concepções acerca da generalização e da capacidade de generalizar, sendo ainda analisada a relação estreita entre generalização e argumentação. De modo a estabelecer a ponte com capítulos prévios são, primeiramente, abordadas algumas características da generalização de padrões de repetição e de crescimento, fazendo referência a estratégias e dificuldades que resultam destes processos, passando depois à discussão da importância da visualização na capacidade de generalizar.

A componente empírica deste trabalho subdivide-se em dez capítulos. O Capítulo 6, *Metodologia*, tem início com um conjunto de considerações gerais sobre metodologias de investigação e, em seguida, são apresentadas e fundamentadas as opções adoptadas neste estudo. No Capítulo 7, *As Tarefas*, procede-se à caracterização detalhada das tarefas utilizadas na investigação e à apresentação de algumas hipotéticas resoluções, suscitadas para cada uma delas. Nos Capítulos 8 e 11, *A Turma A* e *A Turma B*, é feita uma descrição do trabalho desenvolvido por cada uma das turmas que participaram no estudo. Nos Capítulos 9, 10, 12 e 13, são apresentados, de forma detalhada, os quatro casos, relativos a dois pares de alunos de cada uma das turmas. A parte empírica termina com o Capítulo 14, *Discussão e Conclusões*, no qual é feita uma síntese dos principais resultados obtidos, incidindo nas conclusões resultantes da análise de todos os dados recolhidos. Neste capítulo são ainda apresentadas algumas recomendações decorrentes dos resultados desta investigação e uma reflexão acerca das limitações do estudo.

Por fim, é apresentada a lista de referências consultadas ao longo do estudo, bem como os anexos.

CAPÍTULO 2

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Neste capítulo são abordados alguns aspectos relacionados com o ensino e a aprendizagem da matemática, tendo por base documentos curriculares e bibliografia no âmbito da educação matemática. Começa-se por uma análise da evolução das perspectivas curriculares em Matemática, dando-se especial enfoque às recomendações mais recentes para o ensino da matemática. Na secção seguinte, faz-se uma abordagem à resolução de problemas como eixo orientador do ensino da matemática, focando o conceito de problema e os pressupostos subjacentes a um ensino centrado na resolução de problemas. Finalmente, é feita uma análise de aspectos particulares da aula de matemática, dando especial atenção ao papel das tarefas.

2.1. Orientações curriculares para o ensino da matemática

Os objectivos da matemática educacional dependem directamente das concepções acerca da Matemática e do que significa fazer matemática. As características delineadas no currículo reflectem necessidades de ordem social e política mas também perspectivas associadas aos saberes científicos e à sua natureza, em conjugação com as teorias educativas. À semelhança do que tem acontecido noutros países, o currículo de Matemática em Portugal tem vindo a sofrer importantes alterações ao longo dos anos, associadas a mudanças sociais e ao desenvolvimento da própria Matemática.

A década de oitenta constituiu um período marcante para a matemática escolar e para o desenvolvimento curricular em matemática, a nível nacional e internacional. As orientações definidas, neste período, para o ensino da matemática implicaram uma mudança radical relativamente ao tipo de capacidades a valorizar e ao tipo de metodologias a privilegiar. Para melhor compreender a relevância deste volte-face é pertinente efectuar uma revisão sintética das tendências e reformas curriculares mais importantes até esta altura. Pode dizer-se que houve dois momentos que implicaram grandes mudanças no currículo de Matemática, um durante os anos 50 e 60 e o outro por volta dos anos 80.

Desde o início do século XX até aos anos 50, os currículos foram-se apresentando mais ou menos estáveis, centrados na memorização de factos e procedimentos que os alunos aplicavam de forma mecânica sem compreender os conceitos e técnicas envolvidos. Apesar de o ensino da Matemática ser essencialmente direccionado para competências de cálculo, curiosamente, os alunos demonstravam reduzidas competências nesta área. Esta situação conduziu à necessidade de se efectuar uma reforma curricular tendo em vista a modernização da Matemática. Nos anos 60 surgiu então o movimento da Matemática Moderna que defendeu a relevância da abstracção em Matemática, privilegiando a linguagem de conjuntos e o estudo das estruturas, especialmente as estruturas algébricas. Partindo do pressuposto que as dificuldades apresentadas pelos alunos se deviam ao facto de não serem capazes de estabelecer relações entre as ideias e conceitos, pensava-se que a utilização de uma linguagem comum e o estudo de estruturas unificadoras pudesse contribuir para inverter este insucesso. Na verdade, o ensino da Matemática passou a ter na sua base uma sólida componente de abstracção, incidindo na utilização de simbolismo muito forte, que se revelou de difícil compreensão para os alunos que continuaram a evidenciar maus resultados.

No início dos anos 80 começaram a surgir fortes críticas a este movimento curricular que conduziram à consideração de novas orientações. O movimento de reforma curricular que se seguiu teve na sua base a publicação de dois documentos marcantes que conduziram a uma renovação do ensino da matemática. Um deles foi a *Agenda for Action* (NCTM, 1980) que alerta para o facto de as competências básicas serem mais do que apenas destrezas de cálculo, salientando ainda a utilidade de tecnologias, como a calculadora e o computador, em todos os níveis de ensino. No entanto, a recomendação mais marcante neste documento é a consideração da resolução de problemas como o foco da Matemática escolar. Outra publicação fundamental foi o relatório *Mathematics Counts* (Cockcroft, 1982) que analisou aprofundadamente o ensino da Matemática na Inglaterra e no País de Gales e faz referência aos aspectos do ensino da matemática a considerar em qualquer nível de ensino, nomeadamente: a importância da exposição de conceitos pelo professor; a promoção de discussões na sala de aula que envolvam professor e alunos; a consolidação e prática de procedimentos rotineiros e competências básicas; a resolução de problemas; e o trabalho de investigação. No final da década de 80, foram surgindo outros documentos curriculares significativos. Salienta-se um em particular, pelo impacto que teve nos currículos um pouco por todo o mundo, o *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989). Este documento propõe um conjunto de normas para os currículos de matemática, nos diversos níveis de escolaridade K-12. Nesta publicação, são apresentadas propostas bastante consistentes que defendem uma matemática para todos os alunos, enfatizando os aspectos conceptuais desta área disciplinar e a valorização de processos cognitivos complexos, por oposição ao ensino de procedimentos mecânicos e repetitivos. Entre outros pressupostos, são identificados vários objectivos de carácter social e afectivo, bem como objectivos de aprendizagem, relacionados com o desenvolvimento de capacidades como a resolução de problemas, o raciocínio, o estabelecimento de conexões matemáticas e a comunicação. De uma forma geral, estas orientações vão de encontro a uma visão construtivista do processo de aprendizagem, considerando que a matemática escolar deve promover no aluno o desenvolvimento do seu poder matemático, contemplando as capacidades de explorar, conjecturar, raciocinar e resolver problemas bem como o desenvolvimento da sua auto-confiança. As orientações curriculares decorrentes deste conjunto de publicações passaram a valorizar quatro ideias fundamentais: (1) a natureza das competências matemáticas que merecem especial atenção no processo de ensino e aprendizagem, desde a resolução de problemas, as investigações, a comunicação, o desenvolvimento do espírito crítico, a modelação, a análise de dados e a realização de demonstrações; (2) o impacto das novas tecnologias na Matemática e na sociedade em geral, nomeadamente o computador e a calculadora; (3) a emergência de novos domínios na Matemática (e.g. matemática discreta, estatística e probabilidades); e (4) o aprofundamento da investigação sobre o processo de aprendizagem (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997). Estas mudanças curriculares tiveram fortes implicações no papel do professor e no processo de avaliação. Os educadores matemáticos sentiram necessidade de aceder a orientações claras no sentido de concretizar os novos requisitos do currículo, já que o professor passava a ser o elemento chave na condução do processo de ensino e aprendizagem que se revelava bastante mais exigente. Neste sentido foi publicado o documento *Professional Standards for Teaching Mathematics* (NCTM, 1991). Da mesma forma a avaliação não podia restringir-se à utilização dos métodos tradicionais, como os testes, sendo propostas estratégias de avaliação alternativas no documento *Assessment Standards for School Mathematics*

(NCTM, 1995), passando a entender-se o objectivo da avaliação como uma forma de promover a aprendizagem.

Os programas curriculares portugueses propostos na década de 90 foram influenciados significativamente por estas orientações. Foi a partir do documento *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988) que se traçaram as linhas de força que deveriam ser contempladas nos programas de Matemática em preparação na altura. Pode ler-se que a resolução de problemas é apontada como uma alternativa às orientações delineadas nos programas associados ao movimento da Matemática Moderna:

> A Matemática é essencialmente uma actividade criativa constituindo a formulação e a resolução de problemas o seu núcleo fundamental. Por outro lado, nas suas relações com as outras ciências e demais actividades humanas, o seu contributo fundamental é ainda o papel que desempenha na resolução dos problemas de cada uma dessas áreas. Por fim concordaremos que muitos aspectos da nossa vida diária constituem situações problemáticas.
>
> A resolução de problemas poderá, assim, constituir um elemento integrador e gerador de significado. Além disso, pode ainda contribuir para uma maior flexibilidade curricular. Por outro lado, do ponto de vista da aprendizagem, uma situação problemática é consensualmente considerada como um elemento gerador de contextos ricos, propiciadores de aquisições e desenvolvimentos relevantes e duradouros.
>
> Daqui o sentido em assumir a Resolução de Problemas como uma linha de força que, "atravessando" todo o currículo, oriente a definição dos seus objectivos, a proposta de metodologias, a selecção dos conteúdos e processos de avaliação. Isto não significa o abandono das "regras e das técnicas" mas o deslocar da ênfase para uma via educativa, de ensino e aprendizagem da Matemática, que parece corresponder melhor às necessidades do desenvolvimento da criança e do jovem, à natureza e exigências internas e externas da Matemática, às solicitações sociais (p. 23).

Os Programas de Matemática do ensino básico, aprovados mais tarde em 1990 e 1991, reflectem a influência destes pressupostos, sugerindo como orientações curriculares fundamentais: a resolução de problemas; a relação com a realidade; e a relação entre os aspectos intuitivos e formais na apresentação dos conteúdos.

As orientações que regem os currículos devem ser periodicamente revistas e confrontadas com a evolução da Matemática e com o contexto social, de modo a que os objectivos traçados para a aprendizagem sejam os mais adequados. Com base neste pressuposto, o NCTM publicou os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), tendo em vista a actualização da publicação de 1989. Este documento descreve um conjunto de Princípios que devem ser contemplados de forma a proporcionar um ensino de qualidade, nomeadamente: a Equidade, o Currículo, o Ensino, a Aprendizagem, a Avaliação e a Tecnologia. É salientado que estes Princípios devem ser interpretados numa perspectiva integradora e podem influenciar significativamente o desenvolvimento do currículo, a selecção de materiais, a planificação de unidades de ensino, o planeamento da avaliação, entre outros aspectos. O documento contempla ainda um conjunto de normas, comuns a todos os níveis de ensino, que se encontram divididas por temas matemáticos (Número e Operações, Álgebra, Geometria, Medida, Análise de dados e Probabilidades) e capacidades transversais (resolução de problemas, raciocínio e demonstração, comunicação, conexões e representação). Estas dez normas constituem indicadores acerca do que se espera que os alunos aprendam e sejam capazes de fazer e devem ser interpretadas não de forma estanque mas como um corpo sólido de competências e conhecimentos matemáticos, interagindo entre si. Mais tarde, surgiu o documento *Curriculum Focal Points* (NCTM, 2006) que apresenta os tópicos matemáticos de maior relevância para cada nível de ensino, na tentativa de orientar o professor na identificação de aspectos particulares nos quais deve centrar a sua atenção.

Na perspectiva de contribuir para a construção de uma concepção de currículo mais aberta e abrangente, é publicado em Portugal o *Currículo Nacional – Competências Essenciais* (ME-DEB, 2001) que destaca um conjunto de competências consideradas essenciais para o currículo, explicitando os tipos de experiências de aprendizagem que devem ser proporcionadas aos alunos ao longo de todo o ensino básico. Este documento salienta que as principais finalidades da Matemática no ensino básico são "proporcionar aos alunos um contacto com as ideias e métodos fundamentais da matemática que lhes permita apreciar o seu valor e a sua natureza, e desenvolver a capacidade e confiança pessoal no uso da matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar" (p. 58). É ainda assumido que só é possível concretizar estes objectivos se os alunos tiverem oportunidades para viver experiências de aprendizagem adequadas e significativas, sendo destacados: a resolução de problemas, as actividades de investigação, a realização de projectos e os jogos.

Recentemente, foi publicado no nosso País o novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007) que foi estruturado com o propósito de reajustar os programas em vigor desde a década de 90, tendo por base a conjuntura social e as recentes tendências curriculares. Esta necessidade de reformulação foi fundamentada com o desenvolvimento do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da matemática desde então e o objectivo premente de melhorar a articulação entre os programas dos três ciclos do ensino básico. Ao longo do documento é dada ênfase a três capacidades consideradas transversais a toda a aprendizagem da Matemática: a Resolução de Problemas, o Raciocínio Matemático e a Comunicação Matemática. A resolução de problemas é encarada como uma capacidade matemática fundamental, sendo esperado que os alunos resolvam problemas em diferentes contextos, matemáticos e não matemáticos, e que sejam capazes de aplicar estratégias variadas, procedendo à discussão das soluções encontradas e dos processos utilizados. O raciocínio matemático envolve a formulação e teste de conjecturas e o estabelecimento de generalizações. Neste contexto os alunos devem ainda construir argumentos relativos a resultados, processos e ideias matemáticos, avaliando a sua validade. Finalmente, na comunicação matemática, onde se contemplam as vertentes oral e escrita, é expectável que os alunos expressem as suas ideias recorrendo à linguagem natural e simbólica, mas também que sejam capazes de interpretar e compreender as ideias que lhes são apresentadas.

O desenvolvimento da matemática e as necessidades da sociedade foram contribuindo para que as tendências curriculares em Matemática sofressem várias alterações nos últimos anos. Resumidamente, pode-se afirmar que as recomendações curriculares actuais apontam para um ensino centrado na resolução de problemas, orientado por experiências de aprendizagem ricas e diversificadas que proporcionem aos alunos a integração de conhecimentos e de recursos, bem como momentos significativos de discussão e reflexão.

2.2. A resolução de problemas: uma das principais linhas orientadoras do currículo

Ao analisar as tendências curriculares dos últimos vinte anos, verifica-se que a resolução de problemas tem vindo a ganhar uma expressão cada vez mais forte no currículo de Matemática, assumindo-se como uma capacidade transversal às diferentes áreas temáticas. É frequentemente reconhecida como uma componente importante da aprendizagem, mas também como uma forma de envolver significativamente os alunos na actividade matemática e consequentemente na construção do seu conhecimento.

A conceptualização da matemática associada à actividade de resolver problemas e a consideração da resolução de problemas como um grande objectivo da matemática escolar, devem-se em grande parte ao trabalho de Polya. A sua obra *How to Solve It* (Polya, 1945) serviu de inspiração ao movimento curricular despoletado na década de 80 e contribuiu de forma significativa para esclarecer o papel educativo da resolução de problemas, tendo influenciado os currículos actuais, já que a resolução de problemas surge como eixo orientador das recomendações curriculares, em todos os níveis de ensino (Ponte, 2005).

Na perspectiva de Polya não basta ao aluno dominar algoritmos, técnicas e conhecimentos factuais, é fundamental que contacte e se envolva na resolução de problemas desafiantes, de modo a ter uma experiência matemática genuína. Considera ainda que constitui uma experiência intrínseca à actividade humana:

> Resolver um problema significa encontrar uma saída, uma forma de contornar uma dificuldade, tentando atingir um objectivo que não é imediatamente alcançável. Resolver problemas é uma característica inerente à inteligência que é própria da condição humana: resolver problemas pode ser visto como a actividade humana mais característica (Polya, 1965, p. v).

É deste modo perceptível que, para Polya (1965), a resolução de problemas é um aspecto fundamental da actividade matemática, dando aos alunos a oportunidade de terem uma experiência semelhante à actividade dos matemáticos. Outros autores partilham esta visão salientando que a resolução de problemas é a base de toda a actividade matemática (e.g. Reys, Lindquist, Lambdin, Smith & Suydam, 2001).

A atenção dada à resolução de problemas no campo da educação matemática é indiscutível, no entanto o conceito de problema tem gerado alguma controvérsia ao longo dos anos. Segundo Chapman (1997), a resolução de problemas tem significados diferentes para diferentes indivíduos, sendo frequentemente interpretada como um objectivo, um processo, uma competência, uma linha de questionamento ou mesmo uma metodologia de ensino. É fundamental analisar algumas questões associadas a esta discussão, nomeadamente, o que constitui um problema em matemática e quais os objectivos de um ensino centrado na resolução de problemas.

Muitos autores (e.g. Kilpatrick, 1985; Lester, 1980; Polya, 1965; Schoenfeld, 1992; van de Walle, 2003) têm apresentado as suas perspectivas, propondo definições de problema e sobre a resolução de problemas. Apesar da diversidade de ideias, todas estas concepções convergem num ponto, um problema pressupõe uma questão à qual o indivíduo não é capaz de responder usando o conhecimento imediato, envolvendo, deste modo, a formulação e utilização de estratégias que se adaptem à situação proposta. No entanto, mesmo sendo identificadas características comuns nas várias definições, é necessário considerar a experiência do resolvedor e a sua relação com a situação que lhe é apresentada, já que uma mesma questão pode constituir um problema para um indivíduo e apenas um exercício ou facto específico para outro (Vale, 2000), no caso de dispor de um procedimento que lhe permita a resolução imediata da situação proposta. Deste modo, conclui-se que há factores que condicionam e dificultam a caracterização de problema, como é o caso dos conceitos, procedimentos e raciocínios envolvidos, aliados a factores inerentes ao resolvedor. Em traços gerais, a resolução de problemas constitui um processo que implica capacidades cognitivas de ordem superior, nomeadamente a comunicação e o raciocínio, ou seja capacidades que vão para além da mera recuperação de informação.

As perspectivas sobre um ensino da matemática centrado na resolução de problema são também diversificadas. Vários autores destacam a relevância de ensinar *para*, *sobre* e *através* da resolução de problemas (e.g. NCTM, 2000; Schoenfeld, 1992), bem como as implicações de cada uma destas abordagens na aprendizagem.

O ensino *para* a resolução de problemas tem semelhanças com o modelo tradicional de ensino da matemática, no qual os alunos aprendem conteúdos matemáticos para posteriormente os aplicarem na resolução de problemas relacionados com esses mesmos conteúdos. Quando o professor usa esta abordagem levanta-se uma questão relevante, relacionada com a selecção criteriosa dos problemas de forma a evitar que os alunos usem procedimentos mecanizados. Em alternativa, espera-se antes que sejam capazes de transferir e aplicar o conhecimento adquirido na resolução de diferentes tipos de problemas (Schoenfeld, 1992).

O ensino *sobre* a resolução de problemas implica, por parte do professor, uma orientação sobre o processo de resolução de problemas e sobre possíveis estratégias para abordar os problemas propostos. Polya (1965) deu um contributo fundamental para esta perspectiva, através do modelo de resolução de problemas que descreveu. Neste modelo, baseado no ensino de heurísticas gerais, Polya identificou quatro fases: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e verificar a solução. Salientou que as técnicas de resolução de problemas precisam de ser ilustradas pelo professor, discutidas com os alunos e praticadas tendo em vista a sua compreensão e não a mecanização. A fase mais complexa para os alunos é a de elaboração de um plano que envolve a selecção de uma estratégia, de um modo de acção, que permita chegar à solução. Neste sentido, Polya destacou ainda um conjunto de estratégias de resolução com o objectivo de envolver os alunos de forma mais activa na resolução de problemas e simultaneamente clarificar e orientar o seu modo de pensar. É por isso crucial que o professor sensibilize os alunos para as potencialidades das diversas estratégias que podem ser utilizadas na resolução de um problema, analisando-as detalhadamente para que se tornem mais explícitas para os alunos.

O ensino *através* da resolução de problemas tem características diferentes das duas perspectivas anteriores, já que, neste caso, a resolução de problemas constitui uma forma de questionamento na aula de matemática em vez de uma tarefa, ou seja, é encarada como um meio e não um fim. Os problemas são utilizados como um veículo para a aprendizagem, como o contexto através do qual a aprendizagem de ideias matemáticas tem lugar (Stacey, 1989). Esta abordagem tem um grande enfoque na compreensão, esperando-se que os alunos tentem avaliar quais os procedimentos matemáticos necessários à resolução do problema, envolvendo-os naturalmente no processo de *fazer* matemática.

Embora estas três perspectivas façam sentido na aula de Matemática, a terceira é considerada a mais relevante. Por exemplo, Siemon e Booker (1990) sugerem que o ensino *para* a resolução de problemas contribui para a aquisição de conhecimento, competências e estratégias, já o ensino *sobre* a resolução de problemas constitui o meio para aceder, monitorizar e dirigir o que se conhece e o que pode ser feito, e o ensino *através* da resolução de problemas é o contexto ideal para que os alunos aprofundem o seu conhecimento, aprendendo de forma mais significativa. A resolução de problemas não deveria ser um processo separado da actividade matemática, mas sim o contexto no qual os alunos aprendem competências e conceitos matemáticos (Zemelman, Daniels & Hyde, 1998). Acrescenta-se ainda que esta última perspectiva é aquela que melhor se enquadra nas recomendações curriculares delineadas para a resolução de problemas (NCTM, 1989, 2000; ME-DEB, 2001; ME-DGIDC, 2007).

Em síntese, a importância da resolução de problemas pode ser fundamentada em dois contextos distintos. Por um lado, constitui uma oportunidade única para demonstrar aos alunos a relevância da matemática no seu quotidiano, contribuindo para um maior envolvimento da sua parte, mas é ainda uma ferramenta pedagógica poderosa para auxiliar os alunos na construção do conhecimento matemático. No entanto, apesar do papel atribuído à resolução de problemas na matemática escolar e da quantidade de trabalhos de investigação que têm focado esta temática, os alunos apresentam grandes dificuldades e um nível de desempenho baixo na resolução de problemas, o que implica a necessidade de continuar a investir nesta área.

2.3. A aula de Matemática

O conhecimento e a compreensão sobre a forma como os alunos aprendem são fundamentais para o ensino da Matemática, contribuindo de forma significativa para uma diversidade de aspectos associados à prática docente. Apesar de esta ser uma opinião generalizada, são identificadas diferentes perspectivas acerca do processo de ensino e aprendizagem da Matemática e em, particular, das características da aula de Matemática. Neste sentido, nas secções seguintes são caracterizadas duas das perspectivas de ensino mais evidenciadas na literatura, passando-se à análise de aspectos particulares da aula de matemática, enfatizando o papel das tarefas propostas na aprendizagem.

2.3.1. Ensino tradicional vs Ensino construtivista

Na literatura em educação matemática é comum encontrar-se a distinção entre dois modelos de ensino que normalmente regulam a prática docente: o ensino tradicional (Zabala, 1998) e o ensino que actualmente se defende, o construtivista (Simon, 1995), por vezes também referido como ensino da reforma (Watson, 2008). A estruturação da aula de Matemática em torno destes modelos condiciona, de forma incontornável, os papéis assumidos pelo professor e pelos alunos, bem como a natureza das tarefas propostas e da comunicação estabelecida entre os intervenientes no processo de ensino e aprendizagem (Tabela 1).

O ensino tradicional caracteriza-se pela utilização de uma estrutura padrão vulgarmente designada por I-R-F (Zevenbergen, 2001). O professor inicia a sua intervenção colocando questões, a que os alunos dão resposta e que são posteriormente avaliadas pelo professor que lhes dá o seu feedback. Neste modelo de ensino, o professor desempenha um papel central, transmitindo o conhecimento de forma unidireccional aos alunos. Expõe os conteúdos, apresenta exemplos e modela exercícios. Espera-se que os alunos interiorizem passivamente os conhecimentos veiculados deste modo. Após a exposição feita pelo professor, os alunos treinam individualmente e de forma repetida exercícios, presentes no manual escolar, para os quais existe apenas uma estratégia de resolução e uma resposta correcta. A metodologia privilegiada na sala de aula é o trabalho individual. Esta perspectiva é compatível com a visão do processo de ensino e aprendizagem salientada nos currículos prévios às alterações introduzidas na década de 80. Neste contexto, o professor, com a possível excepção do manual, é a autoridade que detém todas as respostas e representa a fonte de toda a verdade matemática. Se os alunos forem capazes de reproduzir os procedimentos que lhes foram ensinados então há evidências claras de aprendizagem.

O ensino associado à perspectiva construtivista defende que o aluno deve ser um participante activo na construção do seu conhecimento em oposição à mera memorização e reprodução de factos e procedimentos que lhe são transmitidos. Isto não significa que o papel do professor, no processo de ensino e aprendizagem, é desvalorizado, pode antes dizer-se que se altera, comparando com o modelo anterior. O professor deve auxiliar os alunos na construção do seu conhecimento, agindo como um mediador da actividade que decorre na sala de aula. Cabe-lhe a tarefa de proporcionar um ambiente de aprendizagem, no qual os alunos possam formular e testar conjecturas, fazer inferências e tirar conclusões, geralmente através de um trabalho colaborativo. Os maiores desafios que se colocam ao professor neste tipo de contexto educativo passam por ser capaz de formular questões pertinentes, que permitam que os alunos desenvolvam e avaliem o seu próprio conhecimento, e construir ou seleccionar tarefas significativas e diversificadas. Deve ter noção de como os alunos aprendem matemática, do tipo de conhecimento que já possuem e quais as tarefas mais apropriadas para promover a aprendizagem e o desenvolvimento. Este conhecimento pode surgir de várias situações como o estar atento às interacções entre os alunos, formulando questões e comunicando ideias através de discussões de grande grupo. Desta forma, há uma partilha e negociação de significados entre os elementos do contexto educacional.

Tabela 1 - Características do ensino tradicional e do ensino construtivista

	Ensino Tradicional	Ensino Construtivista
Características das tarefas	Tarefas rotineiras e repetitivas: exercícios. Resolução fechada: resposta única e apenas uma estratégia de resolução.	Tarefas diversificadas: exercícios, problemas, investigações, projectos, … Permitem a utilização de diferentes estratégias de resolução.
Papel do Professor	É directivo. Expõe os conceitos. Resolve exercícios tipo para dar exemplos. Propõe exercícios semelhantes.	Interage com os alunos, orientando o processo de ensino e aprendizagem. A resolução das tarefas é deixada em aberto. Promove a comunicação e a negociação de significados na sala de aula.
Papel do Aluno	Ouve o professor e executa as tarefas propostas. Trabalha individualmente. Aprende passivamente.	Aprende activamente, já que é um agente directo na construção do seu conhecimento. Questiona os pares e o professor. Trabalha em grupo.

As orientações metodológicas gerais do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* reflectem a valorização da perspectiva construtivista para o ensino da Matemática, salientando a importância do trabalho realizado pelo aluno que é estruturado pelas tarefas delineadas pelo professor:

> O professor deve proporcionar situações frequentes em que os alunos possam resolver problemas, analisar e reflectir sobre as suas resoluções e as resoluções dos colegas. Significa igualmente que o professor deve dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas. A comunicação deve ter também um lugar destacado na prática lectiva do professor. Através da discussão oral na aula, os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas (ME-DGIDC, 2007, p.9).

Neste sentido, Doyle (2007) defende que a natureza do ensino da matemática e das tarefas de sala de aula estão a sofrer alterações, de forma a ir de encontro às necessidades dos alunos. O papel do professor tem vindo gradualmente a mudar, passando de um mero transmissor do conhecimento que propõe exercícios rotineiros, baseados no treino de factos e procedimentos, para o de mediador das discussões promovidas na sala de aula, propondo tarefas matemáticas que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio e da compreensão matemáticos.

É pertinente referir que existem versões extremas dos dois modelos de ensino anteriormente descritos, no entanto é possível que o professor adopte versões intermédias na sua prática (Ponte, 2005). Por exemplo, se o professor assume o protagonismo na aula, através da exposição da matéria e formulando questões acerca do conhecimento que está a ser transmitido, estamos perante um modelo de ensino tradicional. Continua a ter estas características quando o professor, a par de exercícios rotineiros propõe, de forma pontual, tarefas mais abertas, já que a tendência geral do trabalho se aproxima mais da vertente tradicional. Por outro lado, num modelo de ensino de carácter construtivista, também pode haver lugar para momentos de exposição por parte do professor e de sistematização da aprendizagem, apesar de grande parte do trabalho de descoberta e construção do conhecimento ser da responsabilidade dos alunos.

Essencialmente, na definição do modelo que regula a sua prática, o professor opta por um modelo tradicional ou construtivista, podendo ainda decidir por outra modalidade que combine, de alguma forma, as duas perspectivas referidas, já que não se pode esperar que os alunos aprendam apenas aquilo que o professor transmite ou que somente *façam* matemática sozinhos. Segundo Ponte (2005) os factores que condicionam significativamente a definição do modelo de ensino são: (1) o modo como a informação é veiculada; e (2) a natureza das tarefas propostas aos alunos e da actividade delas decorrente. Na secção seguinte é feita uma reflexão baseada na relevância das tarefas na aula de Matemática, na forma como os professores as utilizam e no seu papel no processo de aprendizagem.

2.3.2. As tarefas na aula de Matemática

A relação entre o tipo de tarefas que os alunos resolvem nas aulas de Matemática e a matemática que aprendem tem sido objecto de pesquisa desde há vários anos (e.g. Hiebert & Wearne, 1993; Marx & Walsh, 1988; Stein & Lane, 1996). Uma tarefa pode ser definida como um segmento da actividade da sala de aula, direccionada para o desenvolvimento de uma ideia matemática particular, que pode envolver vários problemas relacionados entre si ou um trabalho prolongado sobre um único problema complexo (Stein

& Smith, 1998). É um facto que as tarefas que cada professor selecciona constituem a base para a aprendizagem dos alunos (Doyle, 2007; Stein & Smith, 1998) e a sua natureza influencia, de forma significativa, o tipo de trabalho que é desenvolvido na aula de Matemática. Tarefas que envolvem a execução de procedimentos, de forma rotineira, representam um determinado tipo de oportunidade de aprendizagem para os alunos, com base em objectivos específicos delineados previamente. Por outro lado, tarefas que exigem que os alunos estruturem o seu pensamento conceptualmente e que os estimulem a estabelecer conexões, num ambiente de aprendizagem desafiante, proporcionam-lhes a oportunidade de atingirem objectivos de aprendizagem mais complexos e de desenvolverem o seu raciocínio. O efeito cumulativo, da exploração recorrente de diferentes tipos de tarefas, conduz os alunos ao desenvolvimento de concepções mais conscientes sobre a natureza da Matemática, dando-lhes ainda uma visão mais abrangente sobre a actividade matemática.

De certa forma, o ensino está muito centrado na construção de tarefas a implementar na sala de aula (Mason, 2002). No entanto, não se trata apenas de construir tarefas mas também seleccionar, analisar e adaptar, num conjunto de tarefas já disponíveis, aquelas que, na óptica do professor, poderão contribuir para que os alunos atinjam um determinado objectivo de aprendizagem. Segundo Ponte (2005) o problema da selecção e articulação das tarefas não se coloca apenas na sua diversificação. As tarefas propostas devem proporcionar um percurso de aprendizagem coerente, que contribua para que os alunos construam os conceitos estipulados pelo professor, compreendam procedimentos matemáticos e estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática.

Nas recomendações definidas para o ensino da matemática, o NCTM (1991) realça a relevância da relação entre a aprendizagem e o tipo de tarefas propostas. Nesta publicação é salientado o papel fundamental do professor na escolha e na implementação de tarefas matematicamente significativas que: envolvam os alunos; estimulem o desenvolvimento de conexões entre ideias matemáticas; impliquem a formulação e resolução de problemas bem como o raciocínio matemático; e promovam a comunicação matemática. Esta ênfase continua a ser evidente nos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) onde se pode ler que:

> Num ensino eficaz, são utilizadas tarefas significativas para introduzir ideias matemáticas importantes e para envolver e desafiar intelectualmente os

> alunos…Este tipo de tarefas podem frequentemente ser resolvidas de mais do que uma forma, …, fazendo com que sejam acessíveis a alunos com diferentes níveis de conhecimento e experiências prévias” (pp. 18-19).

Considerando que as tarefas são um ponto-chave na aula de Matemática, as fases de construção e/ou selecção das propostas a apresentar aos alunos são cruciais no trabalho do professor, já que implicam um decisão significativa que pode afectar a aprendizagem.

Desta forma, como poderão ser estruturadas estas fases? Como deverá o professor proceder na selecção das tarefas a implementar na sala de aula? E como poderá pôr em evidência as potencialidades das tarefas em prol de uma aprendizagem significativa? Com base na literatura, Simon e Tzur (2004) destacam duas abordagens distintas. Uma envolve a selecção de tarefas cognitivamente desafiantes que possam promover as capacidades de raciocinar e resolver problemas (Smith & Stein, 1998). Esta opção tem por base a ideia que os alunos, quando devidamente estimulados por tarefas não rotineiras, desenvolvem as suas capacidades cognitivas e envolvem-se em diálogos ricos do ponto de vista matemático. A outra abordagem passa por seleccionar tarefas que proporcionem o envolvimento dos alunos com os conceitos a aprender (Bell, 2004; van Boxtel, van der Linden & Kanselaar, 2000). No entanto, Ainley e Pratt (2002) alertam para alguns perigos no planeamento feito pelo professor, directamente relacionados com a selecção das tarefas a implementar: (1) planificar a partir dos objectivos poderá resultar na construção de tarefas pobres, do ponto de vista matemático, o que pode implicar a falta de envolvimento por parte dos alunos; e (2) basear a planificação nas tarefas a propor, poderá condicionar a actividade dos alunos, fazendo com que não tenha um foco, o que dificulta a avaliação da aprendizagem. Deste modo, Ainley e Pratt (2002) defendem a necessidade do estabelecimento prévio de uma utilidade, um propósito bem definido, no momento em que as tarefas são desenhadas, de forma a resolver o problema do planeamento. Para que este objectivo seja cumprido, é fundamental que o professor tenha conhecimento acerca do desenvolvimento das estruturas conceptuais, associadas a um determinado domínio matemático, e tenha uma perspectiva clara sobre as estruturas informais do conhecimento dos alunos.

Neste sentido, Simon (1995) construiu um enquadramento teórico que designou de *Ciclo de Ensino da Matemática* no qual descreve as relações entre: o conhecimento do professor; os objectivos de aprendizagem; a antecipação da forma como os alunos aprendem; a fase de planificação da aula; e a interacção do professor com os alunos. Uma componente fundamental deste ciclo de ensino é a chamada *trajectória hipotética de aprendizagem* que, numa definição simplista, significa a previsão do caminho que a aprendizagem pode tomar. Neste modelo, o autor caracteriza a forma como os educadores matemáticos, orientados por uma perspectiva construtivista e por objectivos particulares de aprendizagem, podem pensar sobre o *design* e a utilização de tarefas matemáticas, no sentido de promover a aprendizagem conceptual. Uma *trajectória hipotética de aprendizagem* contempla três componentes fundamentais: os objectivos de aprendizagem dos alunos, as tarefas matemáticas que serão utilizadas para promover a aprendizagem e as hipóteses estabelecidas sobre o processo de aprendizagem (Simon, 1995). Enquanto os objectivos de aprendizagem, propostos pelo professor, dão orientações para as outras componentes, a selecção das tarefas e as hipóteses sobre o processo de aprendizagem estão inter-relacionados. Por um lado, as tarefas são seleccionadas com base nas hipóteses delineadas acerca do processo de aprendizagem, mas, por outro lado, essas hipóteses têm por base as tarefas propostas. Em síntese, as *trajectórias hipotéticas de aprendizagem* pretendem ser descrições do pensamento e da aprendizagem dos alunos num domínio matemático específico, conjecturando-se um caminho para essa aprendizagem, através de um conjunto de tarefas (Simon, 1995). O caminho planificado e as tarefas seleccionadas reflectem as acções mentais que se prevê que os alunos sigam, à medida que resolvem as tarefas propostas.

Há quatro pressupostos que regulam a construção de uma *trajectória hipotética de aprendizagem*: (1) tem por base a compreensão do conhecimento prévio dos alunos; (2) é um veículo para planificar a aprendizagem de conceitos matemáticos particulares; (3) as tarefas seleccionadas devem proporcionar ferramentas que promovam a aprendizagem de conceitos matemáticos particulares e, por isso, são consideradas uma componente fundamental do processo de ensino; e (4) devido à natureza hipotética e naturalmente incerta deste processo, o professor deve estar regularmente envolvido na alteração de qualquer aspecto da *trajectória de aprendizagem*.

A par com os objectivos de aprendizagem e o desenvolvimento do conhecimento dos alunos, em domínios específicos da Matemática, salienta-se de forma evidente a relevância das tarefas seleccionadas na preparação da *trajectória hipotética de aprendizagem*. A sequência de ensino planificada deve ser composta por tarefas que promovam a aprendizagem num determinado nível conceptual. Estas tarefas devem envolver objectos e acções que espelhem, da forma mais fiável possível, a hipotética actividade matemática dos alunos e devem ser sequenciadas de acordo com os níveis de desenvolvimento, estipulados na *trajectória de aprendizagem*. No entanto, a sequência de tarefas delineada não deve ser entendida como o único caminho possível para o processo de ensino e aprendizagem, ou mesmo o mais eficaz, apenas como tendo sido o percurso considerado hipoteticamente mais adequado (Clements & Sarama, 2004).

A construção de um ambiente de aprendizagem estimulante e envolvente passa por propor tarefas válidas e desafiantes, mas é também fundamental que o professor proporcione oportunidades de discussão e de reflexão com os alunos. Stein, Smith, Henningsen e Silver (2000) reflectem sobre esta questão e propõem um modelo que pretende orientar o trabalho do professor na condução de discussões centradas na exploração de tarefas desafiantes, nomeadamente aquelas que promovem o raciocínio e a resolução de problemas. O grande objectivo do modelo estruturado por estes autores é a compreensão conceptual em matemática e divide-se em cinco fases fundamentais: (1) antecipar as respostas dos alunos perante tarefas matemáticas desafiadoras; (2) supervisionar o trabalho dos alunos e o seu envolvimento na exploração das tarefas; (3) seleccionar alguns alunos para apresentar o seu trabalho; (4) sequenciar as respostas dos alunos que serão dispostas numa ordem específica; e (5) relacionar entre si as diferentes respostas apresentadas pelos alunos e com ideias matemáticas chave.

Analise-se, de forma sintética, cada uma das cinco fases apresentadas. Numa fase inicial (1), o professor deve antecipar as respostas dos alunos, tendo por base a forma como poderão interpretar matematicamente o problema proposto, o tipo de estratégias, correctas e incorrectas, que poderão utilizar na sua resolução e de que forma essas estratégias e interpretações se relacionam com as ideias matemáticas que o professor gostaria que os alunos aprendessem. Na fase seguinte (2), a supervisão das respostas dos alunos implica que o professor preste especial atenção ao pensamento matemático dos alunos e às estratégias utilizadas à medida que desenvolvem o seu trabalho. A observação da actividade dos alunos torna possível a utilização das impressões que daí decorrem para decidir o quê e em quem centrar a atenção durante a fase de discussão que se segue. Esta monitorização pode auxiliar o professor na identificação dos alunos ou grupos de alunos que evidenciaram determinadas abordagens ou de ideias que emergiram e que são pertinentes para a discussão em grande grupo. Após esta fase (3), é necessário seleccionar os alunos que irão partilhar o seu trabalho com os restantes intervenientes. Esta escolha deve ser orientada pelo objectivo central delineado para a aula e pela avaliação da forma como cada abordagem irá contribuir para esse objectivo. A decisão sobre como sequenciar a apresentação do trabalho dos alunos (4) pode ser condicionada por diferentes perspectivas. Por exemplo, o professor pode querer começar por apresentar uma estratégia que tenha sido utilizada pela maioria dos alunos e só depois promover a partilha de estratégias menos frequentes. Por outro lado, pode ter a pretensão de começar por uma estratégia particular, usando desenhos ou materiais, e passar para estratégias mais abstractas. Esta sequência, em particular, valoriza estratégias menos sofisticadas, permitindo estabelecer a conexão entre a componente concreta e abstracta. É relevante clarificar que esta sequência não pressupõe apenas a selecção de abordagens correctas, já que é fundamental que os alunos compreendam a desadequação de determinadas estratégias. Finalmente, na última fase (5), o professor deve ajudar os alunos a estabelecer conexões entre as suas resoluções e as dos colegas, assim como com os conceitos matemáticos fundamentais envolvidos na aula. Os alunos devem ser orientados no sentido de avaliar as implicações da utilização de diferentes abordagens na resolução dos problemas propostos. O principal objectivo passa por conseguir que a partilha e a discussão do trabalho dos alunos contribua para o desenvolvimento de ideias matemáticas poderosas, evitando assim uma discussão centrada em apresentações estanques que retratam diferentes formas de resolver o mesmo problema.

Este modelo dá aos alunos a oportunidade para partilhar ideias e clarificar as suas concepções e para desenvolver argumentos convincentes, centrados no como e no porquê das coisas funcionarem, tendo desta forma acesso a outras perspectivas (NCTM, 2000). Neste sentido, o pensamento matemático dos alunos será melhor estruturado se lhes forem propostas tarefas fundamentadas e significativas, planificadas para eles com base no conhecimento e na prática do professor (Harel & Sowder, 2005). Para que isto suceda é fundamental que sejam contempladas diversas situações, nomeadamente: focar directamente obstáculos conceptuais identificados como significativos, em vez de optar por uma abordagem gradual do simples e específico para o complexo e geral (Bell, 2004); construir propostas que tenham por base o conhecimento que os alunos já possuem (Black & William, 1998); usar tarefas acessíveis, com possibilidade de extensões, que encorajem a tomada de decisões, a criatividade e a formulação de questões (Ahmed, 1987); utilizar múltiplas representações de forma a potenciar a ponte entre conceitos (Askew, Brown, Rhodes, Johnson & Wiliam, 1997); e ainda recorrer a tarefas que permitam aos alunos assumir diferentes papéis (Bell, 2004).

CAPÍTULO 3

A VISUALIZAÇÃO NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Os conceitos matemáticos são na sua essência abstractos sendo necessário utilizar capacidades cognitivas de ordem superior para os interiorizar. A utilização de representações, em particular, representações de natureza visual, pode facilitar a compreensão de alguns desses conceitos tornando-os concretos e mais claros. A investigação acerca da visualização na educação matemática é vasta não havendo consenso quanto à sua definição formal e quanto ao seu papel na aprendizagem e na actividade matemática.

Este capítulo tem início com uma análise global da importância e do significado das representações na Matemática. Posteriormente, e tendo por base os objectivos do estudo, o enfoque passa para as representações de tipo visual, confrontando-se as perspectivas de diversos autores acerca do significado de visualização, de forma a encontrar uma definição adequada ao estudo. Nas duas últimas secções do capítulo são discutidas vantagens e desvantagens das abordagens visuais no ensino e na aprendizagem da Matemática e a influência das preferências de pensamento no desempenho dos alunos.

3.1. As representações na aprendizagem da matemática

As representações têm vindo gradualmente a ocupar um papel de destaque na aprendizagem da Matemática e, em particular, na resolução de problemas. Esta relevância traduz-se, por exemplo, na integração da norma *Representação* no grupo dos processos transversais estipulados nos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). No entanto, a investigação sobre a importância da visualização e do papel das imagens mentais na actividade matemática, tem também contribuído de forma significativa para o reconhecimento da utilidade das representações na formação de conceitos matemáticos. São uma componente incontornável da actividade matemática, utilizadas com o propósito de apresentar e fundamentar raciocínios mas também para facilitar a compreensão de ideias matemáticas.

Ao longo das duas últimas décadas foram atribuídos inúmeros significados e conotações ao termo representação (Presmeg, 2006). É importante referir a dificuldade em articular uma definição precisa para este termo. Uma das razões tem a ver com a sua associação, na literatura, à palavra "representar" (Kaput, 1987). Tendo em conta a abrangência da palavra, Kaput considerou que o termo representação envolve várias componentes: (1) a entidade representacional; (2) a entidade que representa; (3) aspectos particulares da entidade representacional; (4) aspectos particulares da entidade que representa e que forma a representação; e (5) a correspondência entre as duas entidades. Apesar das dificuldades salientadas, há algumas propostas de definição no sentido de clarificar o significado do termo representação em matemática. DeWindt-King e Goldin (2003) definem representação como qualquer configuração de símbolos, imagens ou objectos concretos que substituem uma entidade. Speiser e Walter (1997) acrescentam uma importante dimensão na sua descrição de representação, considerando que se trata de uma forma de apresentação criada por um indivíduo, para si próprio, como parte de um pensamento em curso, ou então criada para terceiros como componente integrante de um discurso emergente. Em geral, pode considerar-se que o termo representação se refere simultaneamente ao processo e ao produto (NCTM, 2000), já que, se for entendida como um processo, corresponde ao acto de captar um conceito matemático numa determinada forma, por outro lado, sendo vista como um produto trata-se da forma propriamente dita. Essencialmente, as representações não podem ser vistas como produtos estáticos, considerando-se que capturam o processo de construção individual de um conceito ou relação (Woleck, 2001).

Dando continuidade à discussão sobre a distinção do papel da representação como processo ou produto do pensamento, é fundamental diferenciar representação externa de representação interna. Em matemática os objectos podem surgir com duas conotações diferentes: operacionais, considerando o seu carácter dinâmico, sendo encarados como um processo; e conceptuais, de carácter estático, constituindo assim uma entidade conceptual ou produto. Nos sistemas de representação a distinção é análoga. Distinguem-se as representações internas (formas que integram as estruturas cognitivas de um indivíduo) e as representações externas (utilizadas para comunicar ideias). Dufour-Janvier, Bednarz, e Belanger (1987) referem que as representações internas são imagens mentais que correspondem a formulações internas que se constroem acerca da realidade. A descrição proposta por Romberg, Fennema e Carpenter (1993) contempla as representações internas como estruturas cognitivas complexas interiorizadas pelo aluno e que simbolizam ideias matemáticas. Von Glaserlfeld (1987) designa-as de concepções ou modelos cognitivos que são assimilados e estruturados ao longo da experiência. Estas perspectivas realçam um aspecto relevante do processo de representação, a interiorização de ideias matemáticas e a sua compreensão. Por seu turno, as representações externas correspondem a todas as organizações simbólicas externas (Dufour-Janvier, Bednarz, e Belanger, 1987) que são utilizadas para ilustrar ideias ou conceitos. As formas mais comuns de representações externas incluem palavras, figuras, tabelas, gráficos, diagramas e cadeias de símbolos que surgem quando se pretende comunicar as ideias matemáticas que vão sendo construídas.

Uma das razões que fundamenta a relevância da utilização das representações em Matemática relaciona-se com o contributo, para o processo de ensino e aprendizagem, do estabelecimento de conexões entre representações internas e externas. Goldin e Shteingold (2001) focam esta ideia referindo que a interacção entre as representações externas e internas é fundamental para um ensino e uma aprendizagem significativos. Acreditam que embora os professores não possam observar directamente as representações internas dos alunos, podem fazer inferências sobre elas com base na avaliação das suas representações externas:

> É por vezes útil pensar que a componente externa traduz a interna, como por exemplo quando um aluno desenha um diagrama ou escreve uma fórmula para descrever o que está a pensar. Simultaneamente podemos pensar que a componente interna traduz a externa, como quando um aluno formula uma imagem mental das operações descritas numa fórmula aritmética. Esta perspectiva de transferência é característica da natureza bidireccional da representação (Goldin & Shteingold, 2001, p. 6).

Na mesma linha de raciocínio, Bruner (1966) identificou três sistemas diferentes de representação de conceitos abstractos, nomeadamente, *activo, icónico* e *simbólico,* que podem ser estruturados como três contextos distintos nos quais os indivíduos operam. Considera que estes sistemas de representação são sequenciais, começando no *activo,* passando pelo *icónico* e culminando no *simbólico*. Sugere que, numa fase inicial, as experiências concretas contribuem para a formação de uma noção intuitiva do conceito (modo *activo*). Mas torna-se necessário utilizar imagens para interiorizar o significado desse conceito, sejam imagens mentais ou imagens externas, como figuras e diagramas, que descrevam ou representem esses conceitos (modo *icónico*). Finalmente as imagens são substituídas por símbolos que representam os objectos (modo *simbólico*). Estes três modos de representação não constituem apenas diferentes formas de raciocinar, ou diferentes contextos de trabalho, mas salientam a importância de encorajar os alunos a inter-relacionar a componente física, com a formação de imagens e, por sua vez, esta fase com a simbólica. O objectivo principal passa então por fazer com que os alunos progridam da acção de manipular objectos, para imaginar que estão a movimentá-los e finalmente para a representação desse movimento através de símbolos (Mason, Johnston-Wilder & Graham, 2005).

De acordo com alguns autores, as representações que surgem durante a aprendizagem da matemática e na resolução de problemas, podem ser categorizadas de forma mais refinada. Lesh, Post e Behr (1987) sugeriram uma classificação das representações matemáticas em: concretas (materiais manipuláveis); verbais (linguagem); simbólicas (notação); semi-concretas (pictóricas); e contextuais (situações da vida real). Este esquema de classificação ajuda a diferenciar as várias formas que os conceitos matemáticos podem assumir, mas também dá indicações acerca das capacidades específicas necessárias à compreensão de um determinado conceito. A integração de tecnologias na aula, como as calculadoras e os diferentes *softwares* matemáticos, veio alargar o espectro de representações acessíveis aos alunos, em particular no caso das representações semi-concretas. Neste sentido, Tripathi (2008) propôs uma reclassificação das representações semi-concretas e concretas como representações visuais, categorização que será adoptada neste estudo.

Dreyfus (1991) relaciona as representações com uma importante componente da matemática, a abstracção. Este autor defende que são processos complementares e descreve a forma como se relacionam na aprendizagem. Sugere que o processo de aprendizagem contempla diferentes formas de utilização de representações, desenvolvendo-se ao longo de quatro fases: (1) começar por utilizar uma única representação; (2) usar mais do que uma representação em paralelo; (3) estabelecer relações entre representações paralelas; e (4) integrar representações, desenvolvendo a flexibilidade para alternar entre elas. A abstracção do conceito matemático surge na última fase onde os alunos são capazes de variar, de forma flexível, entre diferentes representações bem como integrar essas mesmas representações. Assim que atingem a última fase, os alunos formam a noção abstracta do conceito matemático. Estas quatro fases podem ser consideradas como níveis crescentes de compreensão começando com um conhecimento limitado acerca de um conceito na primeira fase e culminando com a abstracção ou com um nível mais elevado de compreensão na última fase. Um dos aspectos mais importantes a salientar neste modelo é a constatação da existência de uma diversidade de representações para o mesmo objecto matemático, a importância do estabelecimento de conexões entre elas e da conversão de um modo de representação noutro, culminando na construção de imagens mentais dos conceitos matemáticos.

A integração e a aprendizagem de representações matemáticas devem permitir que os alunos tenham a oportunidade de compreender o potencial e a beleza da Matemática e dar-lhes as ferramentas necessárias para que sejam capazes de aplicar adequadamente diferentes formas de representação (NCTM, 2000). Kaput (1987) defende que algumas das dificuldades com que os alunos se deparam no estabelecimento de conexões entre representações estão relacionadas com a instrução que tende a centrar-se na utilização de representações isoladas. Acrescenta ainda que um aluno que aprenda matemática apenas através da manipulação de símbolos sem relacionar esses procedimentos com outras representações pode ter grande sucesso ao nível da manipulação procedimental mas terá certamente dificuldades em aplicar o seu conhecimento noutro formato que seja diferente do habitual. Os alunos devem assim familiarizar-se com uma grande diversidade de representações e tornar-se capazes de as usar de uma forma flexível.

As formas visuais de representação têm sido um dos tópicos mais investigados nos últimos anos, entre as diferentes formas de representação, em parte porque estão facilmente disponíveis, mas também porque vários investigadores têm concluído que desempenham um papel importante na resolução de problemas (Tripathi, 2008). Tem vindo a ser verificado que este tipo de representações permite que os alunos estabeleçam a ponte entre objectos concretos que podem usar para modelar conceitos e as formas simbólica ou verbal que mais tarde usam para se referir a esses conceitos (Stylianou & Silver, 2004). Em síntese, a visualização está a ser cada vez mais reconhecida como uma componente chave do raciocínio, da resolução de problemas e até da demonstração (Arcavi, 2003).

3.2. O conceito de visualização

Nas últimas duas décadas o termo *visualização* tem sido utilizado, na literatura da especialidade, de diferentes formas e com múltiplos significados, tornando assim necessária a sua clarificação. Segundo Gutiérrez (1996) a terminologia utilizada neste campo é também diversificada, no entanto identifica, em várias perspectivas teóricas, ideias comuns. Com base na literatura, Gutiérrez (1996) faz referência a alguns termos que estão directamente associados à visualização, nomeadamente: representação interna; representação externa; imagem visual; pensamento visual; e percepção visual, entre outros.

Presmeg (1986, 2006) define *imagem visual* como um esquema mental que representa informação visual ou espacial e que está na base da construção de um desenho ou de um arranjo espacial. Esta definição é propositadamente abrangente de modo a incluir diferentes tipos de imagens, representando modelos ou formas, mas também figuras na mente. A autora refere ainda que a definição proposta também possibilita que símbolos verbais, numéricos ou matemáticos sejam dispostos espacialmente com o objectivo de formar uma imagem. A par do termo visualização aparece frequentemente definido o termo *pensamento visual* (Hershkowitz, Parzysz & Dormolen, 1996; Mariotti, 1995). Para Mariotti (1995) significa pensar sobre coisas abstractas que originalmente podem não ser espaciais, mas podem ser representadas na mente de forma espacial, estando assim implicado nesse processo o reconhecimento e manipulação de símbolos de qualquer natureza. No que refere à percepção, esta pode ser entendida como a interpretação que é feita de um objecto, facto ou propriedade. Em particular, a *percepção visual* refere-se à forma como o mundo físico é visto e compreendido (Rivera & Becker, 2007). Estes autores identificam dois tipos de percepção visual: a sensorial, que acontece quando um indivíduo vê um objecto como sendo apenas um mero objecto; e a cognitiva, quando um indivíduo vê ou reconhece um facto ou propriedade relacionado com o objecto observado. Ainda neste âmbito, Duval (1998) defende que há diferentes formas de *ver* um objecto, ou uma figura, referindo-se à sua percepção cognitiva. Sugere pelo menos duas formas de reconhecimento de uma figura, a apreensão perceptual e a apreensão discursiva. No primeiro caso, a figura é vista como um todo, como uma simples forma. A apreensão discursiva implica ver uma figura como uma forma constituída por conjunto de várias sub-configurações. Neste sentido, é fundamental distinguir entre a forma icónica de *ver* as figuras e a interpretação matemática que se faz das mesmas.

Considerando a multiplicidade de termos associados à visualização e a inexistência de uma definição consensual para este conceito, torna-se fundamental analisar as perspectivas de alguns autores.

Para Piaget e Inhelder (1971) quando se recorre a um arranjo de tipo espacial significa que existe uma imagem mental a orientar essa criação. Nesta perspectiva, a visualização inclui os processos de construção e transformação de imagens mentais e representações de natureza espacial que podem estar implicadas na actividade matemática (Presmeg, 1986). A caracterização proposta por este conjunto de autores é bastante abrangente, contemplando simultaneamente dois aspectos do pensamento visual: a interpretação de informação retirada das figuras e o processamento visual.

Ben-Chaim, Lappan e Houang (1989), defendem que a visualização envolve a capacidade de interpretar e compreender informação representada sob a forma de figuras e a capacidade para conceptualizar e traduzir relações abstractas e informação que não é apresentada visualmente. Neste caso, também é possível distinguir dois processos: interpretação de informação visual e produção de imagens visuais com base em informação não visual. Esta segunda situação pode também ser identificada nas palavras de Eisenberg e Dreyfus (1989) quando referem que "muitos conceitos e processos na matemática escolar podem ser associados a representações visuais, isto é, podem ser construídos modelos visuais que reflectem (em grande parte) a estrutura matemática subjacente" (p. 1). Para estes autores, a visualização está associada à representação visual, considerando que qualquer conceito matemático pode ser traduzido por intermédio de um diagrama ou um gráfico.

Gutiérrez (1996) caracteriza a visualização em Matemática como o tipo de actividade que tem por base o recurso a elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou físicos, utilizados na resolução de problemas ou na demonstração de propriedades. Sublinha que a visualização é composta por quatro elementos principais: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e capacidades de visualização.

Zazkis, Dubinsky e Dautermann (1996) definem visualização como uma acção desempenhada por um indivíduo que estabelece uma relação entre um construto interno e algo a que se tem acesso pelos sentidos. Segundo estes autores, essa relação pode ser estabelecida em duas direcções. Um acto de visualização pode ser caracterizado como uma construção mental de objectos ou processos que um indivíduo associa a objectos ou acontecimentos percebidos externamente. Em alternativa, um acto de visualização pode consistir na construção de objectos ou acontecimentos que um indivíduo identifica com objectos ou processos na sua mente, usando para isso um meio externo como o papel, o quadro de giz ou até o ecrã do computador. Esta definição não restringe a visualização à mente nem ao meio externo, salienta a ideia de conexão entre construções mentais e externas. Apesar de estes autores distinguirem entre o que é externo (papel, computador, entre outros) e o que é interno (mente), referem que é o indivíduo que define os objectos como sendo internos ou externos.

Arcavi (2003) apresenta uma definição de visualização que se enquadra nas ideias defendidas por Zimmermann e Cunningham (1991) e por Hershkowitz, Parzysz e Dormolen (1996):

> A visualização é a capacidade, o processo e o produto de criação, interpretação, utilização e análise de figuras, imagens e diagramas, na nossa mente, no papel ou por intermédio de ferramentas tecnológicas, com o propósito de descrever e comunicar informação, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e progredir no conhecimento (p. 217).

Ao analisar e comparar as diferentes definições é possível identificar pontos comuns em algumas delas e estabelecer categorias. Dos contributos de Piaget e Inhelder (1971), Ben-Chaim, Lappan e Houang (1989), Hershkowitz, Parzysz e Dormolen (1996), Zimmermann e Cunningham (1991), Gutiérrez (1996), Zazkis, Dubinsky e Dautermann (1996) e Arcavi (2003) parece claro que a visualização em educação matemática é considerada um processo bidireccional entre a compreensão e o meio externo. Por outro lado, Presmeg (1986) e Eisenberg e Dreyfus (1989) sugerem que este processo se desenvolve numa única direcção. Para Presmeg, o processo de formação de imagens tem início em ambientes externos, enquanto para Eisenberg e Dreyfus, as representações externas resultam da compreensão matemática. Comparando a definição de Zimmermann e Cunningham (1991) com as afirmações de Eisenberg e Dreyfus (1989), depreende-se que, no primeiro caso, a visualização é fundamental no processo de descoberta matemática, enquanto no segundo caso, o seu papel passa a ser secundário, já que se considera que os conceitos matemáticos precedem uma possível representação visual e assim sendo a visualização não tem uma função relevante na construção dos conceitos matemáticos.

Dado que, na literatura, são identificadas múltiplas interpretações do significado de visualização, torna-se pertinente clarificar a perspectiva adoptada neste estudo. Com base nos objectivos delineados nesta investigação considera-se, neste caso, que a visualização corresponde à capacidade de interpretar e usar informação de natureza visual com o intuito de construir e comunicar conhecimento matemático.

3.3. O papel da visualização na história da Matemática

Ao longo da história da Matemática é possível identificar momentos em que a visualização e, em particular, os argumentos de índole visual tiveram um papel preponderante na actividade matemática, mas também períodos em que esta forma de pensamento foi desvalorizada.

Recuando à Grécia Antiga, e analisando o modelo utilizado pelos gregos, é notória a relevância da visualização. O seu raciocínio tinha por base o recurso a imagens idealizadas da realidade física. Tal como afirma Rival (1987) “os diagramas são, sem dúvida, tão antigos como a própria matemática...a geometria sempre se apoiou nas figuras e, durante algum tempo, outros ramos da matemática o fizeram” (p. 43). Um dos exemplos mais característicos, que espelha uma das primeiras tentativas da utilização da visualização como elemento facilitador da compreensão, foi o aparecimento dos números figurados. Tendo como principal propósito compreender a natureza dos números, os pitagóricos representavam-nos utilizando configurações espaciais, recorrendo para isso a pontos que correspondiam à quantidade pretendida. No trabalho de Euclides também se reflectiu o recurso à visualização, tendo sido frequentemente utilizados nas suas provas argumentos que, embora sendo abstractos, resultaram da experiência intuitiva e da utilização de figuras (Harel & Sowder, 2005).

A emergência dos métodos algébricos e analíticos no século XVII constituiu um momento de viragem na história da Matemática que contribuiu para a desvalorização do pensamento visual. No século XIX, a aritmetização da análise, o desenvolvimento das geometrias não euclidianas e a descoberta de que a representação visual de alguns conceitos ou afirmações poderia conduzir a conclusões erradas, reforçaram a tendência para desconsiderar raciocínios que tivessem por base figuras, evitando assim a visualização.

Quase no final do século XX, em particular na década de 80, as concepções relativas à relevância da visualização em matemática, voltaram a alterar-se, tendo para isso contribuído várias situações. Com a emergência do construtivismo e a crescente aceitação das metodologias de investigação qualitativas, tornou-se notória a valorização desta capacidade bem como o interesse na investigação dos processos associados ao pensamento visual. Considerando que a matemática envolve o recurso frequente a diagramas, tabelas, arranjos espaciais de símbolos e/ou outros tipos de representações, o reconhecimento da importância do processamento visual e das representações externas associadas à visualização foi sendo progressivamente evidente. É ainda relevante sublinhar que uma das mais importantes referências da literatura associada à utilização de imagens visuais na actividade matemática foi provavelmente feita por George Polya (1945). Entre as várias sugestões de heurísticas que propôs para a resolução bem sucedida de problemas está a estratégia *fazer um desenho*. Polya não se referia apenas à utilização de figuras na geometria, pelo contrário, salientou que “mesmo que o problema não seja geométrico, podemos experimentar *fazer um desenho*. Encontrar uma representação clara para um problema não geométrico pode ser um passo importante para encontrar a solução” (Polya, 1945, p. 108). Por outro lado, o desenvolvimento das tecnologias, como o computador, tornou possível a representação de informação de natureza diversa, permitindo uma rápida interpretação e compreensão visuais (Mancosu, 2005).

A visualização tem vindo a adquirir um estatuto cada vez maior no seio da comunidade matemática. Este facto está associado não só às suas funções ilustrativas mas também à reconhecida relevância como importante componente do raciocínio (Arcavi, 2003). Este estatuto tem-se reflectido de forma notória, nas últimas duas décadas, na aceitação de artigos que enfatizam a utilização de representações icónicas de ideias e conceitos matemáticos, em várias revistas e jornais de matemática e educação matemática (Stylianou & Silver, 2004).

3.4. O papel da visualização no ensino e na aprendizagem da Matemática

A necessidade de esclarecer o papel desempenhado pela visualização no pensamento matemático e simultaneamente entender a relação entre a utilização de capacidades visuais e o desempenho matemático tem constituído uma área de interesse para vários investigadores. A visualização tem sido salientada, em diversos estudos, como uma capacidade fundamental na promoção da actividade mental, principalmente por estabelecer a ponte entre o mundo físico e o raciocínio, mas a interpretação da sua função não é consensual. As discussões em torno deste tema têm-se centrado essencialmente na relação entre os argumentos de natureza visual com a demonstração e a descoberta em matemática. Muitos investigadores reconhecem e fundamentam a relevância da visualização na actividade matemática e, em particular, na resolução de problemas, afirmando que contribui com métodos fiáveis e passíveis de gerar conhecimento matemático (Presmeg, 2006; Shama & Dreyfus, 1994). Outros investigadores referem que, apesar de ser uma fonte poderosa de ideias, o pensamento visual por si só não é suficiente para se fazer matemática, constituindo apenas um complemento ao pensamento analítico (Goldenberg, 1996; Tall, 1991).

A discussão acerca da natureza e do papel da visualização no ensino e na aprendizagem da matemática é complexa. Muito se tem escrito sobre o potencial desta capacidade no desenvolvimento de uma perspectiva intuitiva global e na compreensão de conceitos associados às diferentes áreas da matemática (Bishop, 1989; Usiskin, 1996; Zimmermann & Cunningham, 1991). A visualização não pode ser reduzida à mera produção ou apreciação de figuras ou desenhos, ou mesmo ao desenvolvimento de conhecimentos no âmbito da geometria, pelo contrário, permite ter uma intuição que contribui para a clarificação das ideias matemáticas e para a interiorização de conceitos em diversas áreas da matemática (Dreyfus, 1991; Hershkowitz, Parzysz & Dormolen, 1996). Presmeg (1986, 2006) salienta uma série de vantagens no desenvolvimento da capacidade de usar imagens ou diagramas em prol da generalização matemática e da conexão entre formas de pensamento. Justifica que os matemáticos sabem o que procurar num diagrama, sabem o que pode ser generalizado de uma figura particular e são também capazes de propor casos particulares de imagens representativos de uma observação mais geral. Com base nestes pressupostos defende que os alunos devem ser encorajados a utilizar este tipo de estratégias.

A sua relevância na exploração e resolução de problemas é incontornável permitindo a utilização de estratégias intuitivas e eficazes que inspiram descobertas criativas (Zimmermann & Cunnigham, 1991). Vários estudos têm analisado as vantagens do recurso à visualização na resolução de problemas (e.g. Kent, 2000; Mariotti, 1995; Presmeg, 1986) e é ideia comum que o pensamento visual contribui com estratégias poderosas, diferentes das que são utilizadas na abordagem tradicional, onde o formalismo e o simbolismo imperam. A visualização pode ainda ter um papel fundamental como ponto de partida ou como complemento ao pensamento analítico. Por exemplo, Fischbein (1987) comenta que "uma imagem visual não só permite organizar dados em estruturas com significado mas também constitui um importante factor na orientação do desenvolvimento analítico de uma resolução" (p. 104). A demonstração é uma componente incontornável na actividade matemática mas antes dessa fase tem que existir uma intuição acerca da validade dos teoremas. A utilização de figuras que traduzem as relações em análise, na etapa exploratória, pode beneficiar a compreensão dessas mesmas relações e contribuir para o convencimento que deve preceder o momento de validação. Em suma, a visualização actua como um elemento catalisador na compreensão do significado dos conceitos e na produção de raciocínios indutivos mas pode também constituir uma maneira informal de compreender raciocínios dedutivos, sendo o tratamento algébrico feito posteriormente. Há por isso razões preponderantes que fundamentam a necessidade de se valorizar esta capacidade na matemática escolar: actualmente a matemática é identificada com o estudo dos padrões que, aliado à utilização da tecnologia, possibilita o desenvolvimento, intuitivo, de regras gerais, acabando por ser desvalorizada a dificuldade do pensamento algébrico; pode fornecer abordagens simples e poderosas de resultados matemáticos e situações problemáticas; e permite estabelecer conexões ricas com diferentes áreas da matemática (Thornton, 2001).

Embora sejam apontadas diversas razões que defendem o recurso a métodos visuais na actividade matemática, também têm sido discutidas, de forma exaustiva, limitações e dificuldades em contexto educativo que podem fundamentar a relutância que alguns alunos apresentam em visualizar.

Arcavi (2003) considerou que as dificuldades que envolvem a visualização podem ser divididas em três categorias: *culturais*, *cognitivas* e *sociológicas*. As dificuldades *culturais* relacionam-se com crenças e valores associados ao significado da matemática e da actividade matemática. A controvérsia existente no seio da comunidade matemática acerca do que é ou não matematicamente aceitável acaba por infiltrar-se nas salas de aula, por exemplo através dos materiais curriculares ou até das metodologias utilizadas pelo professor, condicionando por vezes a ênfase dada à visualização. Esta atitude de desvalorização da visualização condiciona as práticas dos professores que passam a não contemplar o pensamento visual como componente da actividade matemática (Presmeg, 2006). A categoria das dificuldades *cognitivas* envolve a discussão sobre se o pensamento visual facilita ou torna mais complexa a compreensão de conceitos. Quando a visualização é utilizada em imagens que integram uma grande diversidade de estruturas conceptuais, a exigência cognitiva é elevada. Se considerarmos a visualização matemática como "o processo de formação de imagens (mentalmente, com papel e lápis ou com recurso à tecnologia) e a utilização efectiva dessas imagens para a descoberta e para a compreensão em matemática" (Zimmermann & Cunningham, 1991, p. 3), então essas dificuldades podem estar relacionadas com o processo de formação de imagens bem como com a forma como são utilizadas na resolução de problemas. Os métodos visuais normalmente não têm uma estrutura procedimental ou rotineira o que os torna cognitivamente mais complexos do que os métodos analíticos. Estas situações podem contribuir para a rejeição da visualização, quer pelos alunos quer pelos professores, por não lhes dar uma sensação de segurança. Outra dificuldade cognitiva emerge da necessidade de desenvolver uma interacção flexível entre representações visuais e analíticas dentro do mesmo problema. A manipulação de múltiplas representações e a compreensão das suas conexões é um grande objectivo na aprendizagem da matemática mas revela-se um processo algo complexo para os alunos (Schoenfeld, Smith & Arcavi, 1993). As dificuldades *sociológicas* estão associadas às metodologias de ensino. Eisenberg e Dreyfus (1989) sugerem que frequentemente no ensino da matemática o conhecimento transmitido é compartimentado e algoritmizado sendo poucas vezes feita a exploração de conexões ricas. Na opinião de muitos professores as representações analíticas, que por natureza são sequenciais, são mais apropriadas e eficientes do que as visuais, implicando que na sala de aula privilegiem o pensamento analítico em detrimento do visual.

Na literatura há várias referências que alertam para determinadas situações associadas à utilização desadequada do pensamento visual que têm implicações na aprendizagem e que estão muitas vezes associadas ao insucesso na utilização de representações visuais. Frequentemente os alunos apoiam as suas conjecturas na análise de uma única imagem, não reconhecendo a relevância de encontrar um argumento que tenha por base uma propriedade comum (Alcock & Simpson, 2002; Harel & Sowder, 2005). Por outro lado, a utilização de um caso particular, de uma figura ou diagrama, pode prender a atenção do aluno em detalhes irrelevantes ou até conduzir à descoberta de dados que não são válidos (Harel & Sowder, 2005; Presmeg, 1986), uma vez que a imagem é representativa de um subconjunto do universo de objectos considerados. Presmeg (1986) alerta ainda para outras situações. O recurso a uma figura-tipo, na representação de um conceito, pode originar um raciocínio inflexível nos alunos que dificulta o reconhecimento desse conceito num diagrama não estandardizado. Há portanto necessidade de motivar os alunos a conjugar processos analíticos e visuais, principalmente quando a componente visual envolvida não é suficientemente clara.

Dreyfus (1991) centrou-se na análise das razões que poderão estar associadas ao insucesso na utilização de representações visuais e destacou algumas ideias-chave: (1) incapacidade para *ver* múltiplas perspectivas de um diagrama; (2) dificuldade em reconhecer as transformações implicadas num diagrama; (3) interpretação incorrecta ou não convencional de um diagrama; (4) dificuldade em associar representações visuais e analíticas; (5) a relação directa entre o tipo de utilização dada às representações visuais e as concepções dos alunos e do ensino a que foram expostos. Podemos identificar nesta listagem factores maioritariamente de natureza cognitiva, no entanto a componente sociológica é também um ponto fundamental na valorização e na utilização dada à visualização.

Apesar de se considerar que as abordagens visuais constituem um alicerce para a aprendizagem e para a resolução de problemas, na literatura é frequentemente referido que muitos alunos revelam alguma relutância em explorar sistemas de suporte visual (Dreyfus, 1991; Eisenberg & Dreyfus, 1989; Presmeg, 2006). Este fenómeno pode ser potenciado por diversos factores. Por um lado, é possível que a Matemática, pela sua natureza, favoreça o pensador não visual tendo em conta que a componente lógico-verbal é considerada o *sine qua non* das capacidades matemáticas, enquanto a componente visual-espacial não é tida como obrigatória (Krutetskii, 1976). Um segundo aspecto relaciona-se com o currículo da matemática escolar, onde o desempenho é avaliado por testes e exames que normalmente favorecem o pensador não visual. Um terceiro aspecto tem a ver com a relevância atribuída aos métodos não visuais na instrução. Eisenberg (1994) salienta a natureza dual da Matemática:

> Há por um lado a tendência para a abstracção … A outra é a tendência para o pensamento intuitivo que contempla processos de visualização. Em geral as escolas têm vindo a concentrar-se na primeira e uma das

> consequências desta abordagem é que 'uma grande parte dos alunos não gosta de pensar com base em figuras (p. 110).

Os educadores matemáticos aparentemente reconhecem o potencial do pensamento visual mas essa concepção não se reflecte nas suas práticas, continuando a atribuir um papel bastante redutor a este tipo de abordagem. A convenção amplamente estabelecida de que os produtos do trabalho matemático são mais importantes do que os processos leva a que as representações simbólicas ocupem um lugar de destaque na aula de matemática, já que servem para exprimir formalmente os resultados. As ferramentas visuais são consideradas quando muito um passo intermédio na obtenção do objectivo. Esta identificação com as formas simbólicas e algébricas de representação, em detrimento das visuais, reflecte-se no trabalho dos alunos que tendem a evitar o recurso a este tipo de estratégias preferindo as analíticas (Dreyfus, 1991; Eisenberg & Dreyfus, 1989). Mesmo que este comportamento seja ultrapassado, a integração da visualização na actividade matemática tem implicações de carácter cognitivo. Muitos alunos têm dificuldades em *ler* diagramas e reconhecer as transformações neles envolvidas (Kaput, 1987; Goldenberg, 1996) e apresentam uma tendência para não estabelecer relações entre o pensamento visual e o analítico (Presmeg, 1986).

3.5. A relação entre o pensamento e o desempenho

Em qualquer actividade matemática é habitual que sujeitos diferentes processem a informação também de forma diferente. Nesta perspectiva surgiu o interesse em analisar a natureza dos processos de pensamento que intervêm na actividade matemática e a forma como influenciam o desempenho dos alunos.

A utilização da visualização ou de um pensamento de natureza analítica tem sido interpretada por muitos investigadores como uma preferência pessoal e os alunos têm sido categorizados de acordo com essas preferências. Krutetskii (1976) debruçou-se sobre este problema e efectuou um estudo com uma amostra de alunos com bom desempenho em Matemática. Este investigador refere a existência de dois modos fundamentais de pensamento em matemática: lógico-verbal e pictórico-visual. Tendo como foco a análise do pensamento evidenciado pelos alunos que estudou, na resolução de problemas, identificou quatro categorias que assentam na relação entre os dois modos de pensamento referidos anteriormente: (1) *Analítico*, prevalece a componente lógico-verbal. Os alunos não sentem necessidade de utilizar suportes visuais para resolver um problema, mesmo perante problemas que seriam facilmente resolvidos com uma abordagem geométrica simples; (2) *Geométrico*, prevalece a componente pictórico-visual do pensamento. Estes alunos recorrem sempre a abordagens visuais nas suas resoluções; (3) *Harmónico*, reflecte um equilíbrio entre as duas componentes anteriormente referidas, estando ambas amplamente desenvolvidas. Dentro desta última categoria Krutetskii faz uma subdivisão identificando os estilos harmónico-abstracto e harmónico-pictórico. No primeiro caso apesar de poderem usar suportes visuais preferem não o fazer e no segundo caso revelam essa preferência. Embora Krutetskii tenha estabelecido esta categorização com base em alunos com um desempenho em matemática acima da média, sugere que pode estender-se a alunos com outros níveis de desempenho.

As entrevistas efectuadas por Krutetskii (1976) neste estudo sugeriram-lhe não só a existência de uma grande variação nas preferências pela visualização em matemática, mas também que os métodos visuais podem facilitar ou trazer constrangimentos na resolução de problemas. Esta problemática tem sido abordada por diversos investigadores e as conclusões flutuam entre a consideração da visualização como um elemento facilitador da aprendizagem e a referência a uma série de limitações que podem decorrer da utilização da visualização.

O estudo levado a cabo por Lean e Clements (1981) permitiu verificar que os alunos que mostraram preferência pelo pensamento analítico, processando a informação através de métodos lógico-verbais, tiveram um melhor desempenho do que os que adoptaram um pensamento de tipo visual. Estes resultados podem sugerir que as resoluções visuais podem não ser tão eficazes como as analíticas. Também Battista (1980) descobriu que alunos com dificuldades na área da geometria recorreram de uma forma mais frequente a abordagens analíticas para resolver situações problemáticas, raramente usando abordagens visuais. Analisando especificamente a utilização de elementos visuais no pensamento, para além de Presmeg (1986), que salientou a possível influência negativa da análise de uma imagem singular, outros investigadores também identificaram que a má utilização das imagens ou diagramas pode condicionar o raciocínio. Laborde (1993) refere que as imperfeições de um desenho podem impedir a interpretação correcta das ideias pretendidas. Estes resultados contrastam com os de outros estudos que sugerem que é aconselhável utilizar processos visuais na resolução de problemas em matemática. Tall

(1991) descobriu que a promoção de um pensamento flexível em álgebra, usando o potencial visual das imagens em computador, melhorou a compreensão de conceitos de ordem superior. Também Presmeg (1986) identificou vários exemplos em que o processamento visual pode conduzir à compreensão, nomeadamente: a utilização de imagens dinâmicas, a conjugação de imagens concretas com métodos abstractos não visuais e a utilização de imagens representativas de conceitos abstractos.

O confronto destas perspectivas tão díspares leva-nos a considerar que os estímulos visuais têm várias potencialidades mas uma confiança excessiva na componente visual pode limitar o desempenho matemático, conduzindo à ocorrência de algumas dificuldades.

Embora se reconheça a possibilidade de utilização de abordagens de natureza diversa na resolução de um mesmo problema, a maioria dos alunos baseia frequentemente os seus raciocínios em relações numéricas, em parte devido ao tipo de trabalho desenvolvido nas aulas de Matemática. A sobrevalorização do produto da actividade matemática em detrimento do processo que conduz à obtenção dos resultados faz com que a tendência para insistir na utilização de representações analíticas seja natural. Mas apesar da manifesta preferência de muitos alunos pela utilização de métodos analíticos, alguns estudos sobre este tema indicam que surgem melhores resultados quando utilizam uma abordagem mista, ou seja, uma conjugação entre o pensamento analítico e o geométrico (Noss, Healy & Hoyles, 1997; Stacey, 1989; Becker & Rivera, 2005) que consideram ser mais eficaz que a utilização isolada de qualquer uma delas. Esta posição reflecte a ideia de flexibilidade na utilização de diferentes modos de pensamento que é considerado um requisito essencial ao talento matemático (Presmeg, 1986). Há alunos que revelam uma forte preferência por informação de tipo visual enquanto outros preferem a simbólica, mas todos deviam beneficiar de situações de aprendizagem em que a informação é dada em formas paralelas de maneira a verificarem a sua equivalência (Mason , Johnston-Wilder & Graham, 2005) e tornarem-se assim capazes de utilizar qualquer uma delas e decidir qual é a mais adequada de acordo com o problema apresentado.

CAPÍTULO 4

OS PADRÕES E A MATEMÁTICA

Algumas visões mais recentes acerca da natureza da Matemática e do significado da actividade matemática convergem no sentido de se considerar a Matemática como a *ciência dos padrões*. O aluno tem um papel activo na construção do seu conhecimento, explorando propriedades e relações de forma intuitiva, através da consideração de casos particulares que potenciam a procura de padrões e convergem na formulação de conjecturas e validação de resultados.

Este capítulo começa com uma secção dedicada à discussão das perspectivas de vários autores acerca do seu entendimento do conceito de padrão na Matemática, para posteriormente se proceder à proposta de uma definição que se enquadre neste estudo. Nas secções seguintes é feita uma análise do papel dos padrões em termos curriculares, reflectindo posteriormente na sua relação com a resolução de problemas e com a álgebra.

4.1. O conceito de padrão em Matemática

Matemáticos e educadores matemáticos têm vindo a partilhar uma visão entusiástica no que respeita à importância do estudo de padrões, defendendo que constituem a essência de todo o trabalho em matemática (e.g. Davis & Hersh, 1995; Devlin, 2002; NCTM, 2000; Orton & Orton, 1999). Sawyer (1955) refere que a matemática é a classificação e o estudo de todos os possíveis padrões, sugerindo que, de cada vez que um padrão é identificado, pode *fazer-se* matemática. Neste sentido, a procura da ordem e de padrões é encarada como uma das forças motrizes de todo o trabalho matemático. No entanto, a definição que surge com mais frequência é a de Matemática como a *ciência dos padrões* (Devlin, 2002; Steen, 1988), deixando transparecer a ideia da transversalidade dos padrões nesta área, o que sugere a consideração dos padrões como uma qualidade que define a matemática mais do que como um tópico que a integra. Apesar das inúmeras referências ao termo *padrão* e à sua relevância na matemática, não é possível encontrar na literatura uma definição, formal e consensual, de padrão nem informação acerca da evolução do conceito ao longo da história da Matemática.

Perante a questão "o que é um padrão?", é comum fazer-se de imediato a associação aos frisos ou padrões de papel de parede mas esta perspectiva é bastante redutora, dada a abrangência deste conceito, como refere, por exemplo, Devlin (2002):

> O que o matemático faz é examinar "padrões" abstractos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Estes padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo. Podem surgir a partir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das actividades mais ocultas da mente humana. Com o objectivo de transmitir o conceito moderno de matemática, este livro aborda seis temas genéricos, abrangendo padrões de contagem, padrões de raciocínio e de comunicação, padrões de movimento e mudança, padrões de forma, padrões de simetria e regularidade e padrões de posição (topologia) (pág. 9).

Esta interpretação de Devlin realça a existência de padrões de diversos tipos no universo que nos rodeia. É possível identificá-los numa grande diversidade de contextos: nos elementos matemáticos; na natureza; na arquitectura; na arte; nos sistemas computacionais, entre outros.

A procura de padrões está na base da tentativa de compreender e explicar os fenómenos e as relações entre eles, processo inerente ao funcionamento da inteligência humana. O instinto do cientista é tentar entender o mundo natural e o do matemático é entender a estrutura, os processos, procurar regras, ou seja, padrões. Nesta perspectiva o estudo dos padrões é quase incontornável já que aparecem tanto no mundo à nossa volta como na própria Matemática. No entanto, a natureza multifacetada do termo *padrão* torna complexa a tarefa de formular uma definição que abranja todas as perspectivas e contextos em que pode ser identificado, por isso tem dado lugar a "definições muito díspares, consoante a utilização que é pretendida" (Vale *et al.*, 2006, p. 195).

Ao analisar algumas propostas de definição de padrão, no âmbito da matemática, é muito frequente encontrar a referência à procura da regularidade ou da estrutura, o que, em certa medida, vai de encontro ao principal objectivo da matemática que é "descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão" (Davis & Hersh, 1995, p. 167). No entanto, Orton e Orton (1999) acrescentam ainda a associação da palavra padrão às ideias de repetição e simetria, de modo a contemplar os diferentes contextos em que pode surgir, focando em particular o numérico e o geométrico.

Há uma grande diversidade de termos que aparecem normalmente associados à temática dos padrões. Com base na literatura, apresentam-se na Tabela 2 alguns dos termos que se considera serem relevantes para este trabalho e a respectiva definição.

Tabela 2 - Definição de termos associados ao conceito de padrão

Termo	Definição	Referências
Sequência	Conjunto de elementos matemáticos ordenados de acordo com uma regra.	Frobisher *et al.*, 1999
Padrão numérico	Sequência na qual os elementos matemáticos são números.	Frobisher *et al.*, 1999
Padrão visual	Sequência na qual os elementos são objectos, figuras ou símbolos.	Frobisher *et al.*, 1999 Vale *et al.*, 2009
Padrão de simetria	Um objecto ou configuração que possui simetria é constituído por partes equivalentes que podem ser trocadas sem alterar a aparência global.	Frobisher *et al.*, 2007
Padrão de repetição	Sequência de números ou formas na qual se reconhece uma unidade (conjunto de elementos da sequência) que se repete ciclicamente.	Threlfall, 1999 Frobisher *et al.*, 1999
Padrão de crescimento	Sequência de números ou formas que se prolonga de modo regular.	Moyer-Packenham, 2005
Friso	Padrão de repetição que envolve formas que podem ser colocadas indefinidamente ao longo de uma superfície.	Frobisher *et al.*, 2007

As componentes de mudança, repetição e prolongamento são cruciais quando se trata de padrões. Qualquer padrão pode ser descrito relativamente à forma como pode ser repetido ou prolongado, independente dos objectos que estão envolvidos na sua estrutura. Partindo deste pressuposto, entendeu-se neste estudo considerar que um padrão é todo o arranjo de números ou formas onde são detectadas regularidades passíveis de serem continuadas.

4.2. Os padrões na matemática escolar

Muitos filósofos, matemáticos e educadores matemáticos acreditam que os padrões são fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Orton (1999) defende a utilização de padrões na "tentativa de ajudar os alunos a atribuir um maior significado, satisfação, ou até ambos, à experiência ou ambiente de aprendizagem e até quem sabe a facilitar a memorização" (p. vii). Os alunos devem ser encorajados a procurar padrões na matemática já que "relacionar padrões nos números, na geometria e na medida ajuda-os a compreender as conexões entre os tópicos matemáticos (…) o que potencia o tipo de pensamento matemático que serve de base à construção de ideias mais abstractas" (NCTM, 1989, p. 60).

A importância do trabalho com padrões na matemática escolar tem-se reflectido nas propostas curriculares de vários países. Uma das mais influentes referências na matemática educacional, o NCTM, propõe no documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989), para os níveis de ensino K-4, uma norma designada de *Padrões e Relações* e, para os níveis 5-8, a norma *Padrões e Funções,* acabando por se diluir nos níveis de ensino seguintes a referência aos padrões. Mais tarde, no *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) há uma actualização do documento anterior surgindo uma norma comum a todos os níveis K-12, a *Álgebra*, que contempla, para além dos padrões e das funções, outros tópicos que não estavam tradicionalmente associados à álgebra. Nesta norma são identificados quatro grandes temas: (1) compreender padrões, relações e funções; (2) representar e analisar situações; (3) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (4) analisar a mudança em vários contextos. Na Figura 1 apresentam-se, de forma sintetizada, as competências propostas pelo NCTM (2000) para os alunos do ensino básico, K-8, em cada um dos temas destacados na norma *Álgebra*.

	pre-K – 2	3 – 5	6 – 8
Compreender padrões, relações e funções	- Triar, classificar e ordenar objectos pelo tamanho, número e outras propriedades. - Reconhecer, descrever e continuar padrões como sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples e traduzi-los de uma representação para a outra. - Analisar como são gerados os padrões de repetição e de crescimento.	- Descrever, continuar e generalizar padrões numéricos e geométricos. - Representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos.	- Representar, analisar e generalizar uma diversidade de padrões usando tabelas, gráficos, palavras e, quando possível, regras simbólicas. - Relacionar e comparar diferentes formas de representação de uma relação. - Identificar funções como sendo lineares ou não lineares e comparar as suas propriedades através de tabelas, gráficos ou equações.
Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos	- Ilustrar princípios e propriedades gerais das operações como a comutatividade, usando números específicos. - Usar representações concretas, pictóricas e verbais para desenvolver a compreensão das notações simbólicas, inventadas ou convencionais.	- Identificar propriedades tais como a comutativa, a associativa e a distributiva e usá-las em cálculos com números inteiros. - Representar a ideia de variável como uma quantidade desconhecida usando uma letra ou um símbolo. - Exprimir relações matemáticas usando equações.	- Desenvolver uma compreensão conceptual inicial das diferentes aplicações das variáveis. - Explorar relações entre expressões simbólicas e gráficos de linhas, prestando especial atenção ao significado de intersecção e declive. - Usar álgebra simbólica para representar situações e resolver problemas especialmente aqueles que envolvem relações lineares. - Reconhecer e gerar formas equivalentes para expressões algébricas simples e resolver equações lineares.
Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas	- Modelar situações que envolvam adição e subtracção de números inteiros, usando objectos, figuras e símbolos.	- Modelar situações problemáticas com objectos e usar representações como gráficos, tabelas, e equações para tirar conclusões.	- Modelar e resolver problemas contextualizados usando várias representações como gráficos, tabelas e equações.
Analisar a mudança em vários contextos	- Descrever variações qualitativas tal como o aumento das alturas dos estudantes. - Descrever mudanças quantitativas.	- Investigar a forma como a mudança numa variável se relaciona com a mudança numa segunda variável. - Identificar e descrever situações com razão constante ou variável e compará-las.	- Usar gráficos para analisar a natureza das variações nas relações lineares.

Figura 1 - Competências a desenvolver nos níveis K-8 no âmbito da Álgebra (NCTM, 2000)

Mais recentemente o NCTM organizou um outro documento curricular, *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics* (NCTM, 2006), no qual é feita uma descrição das capacidades e dos conceitos matemáticos mais significativos em cada nível de ensino. Salienta-se que o currículo deve ser organizado em torno destes itens, com uma ênfase clara nos processos de comunicação, raciocínio, representação, conexões e resolução de problemas já realçados amplamente nos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). Neste documento é possível identificar referências claras ao trabalho com padrões, em todos os níveis de ensino contemplados, essencialmente no campo da álgebra. As orientações indicam que é fundamental trabalhar com todo o tipo de padrões (padrões de repetição e de crescimento, padrões numéricos e geométricos, padrões lineares e não lineares) bem como utilizar os padrões como um contexto base para descobrir propriedades matemáticas, especialmente propriedades numéricas, e também para escrever e resolver equações e desigualdades simples.

Em Portugal as propostas curriculares apresentam também referências à importância dos padrões que atravessam a Educação Pré-escolar e todo o ensino básico.

As *Orientações Curriculares para o Ensino Pré-escolar* (ME-DEB, 1997) associam o estabelecimento de padrões ao desenvolvimento do raciocínio lógico, propondo a exploração de padrões repetitivos e não repetitivos bem como padrões de natureza rítmica. As características associadas e estes padrões são bastante diversificadas podendo contemplar cor, som, posição, movimento, forma, etc. As possibilidades de exploração aumentam podendo assim combinar a estrutura do padrão com o tipo de elementos que envolve (Palhares & Mamede, 2002).

O *Currículo Nacional do ensino básico - Competências Essenciais* (ME-DEB, 2001) sublinha a importância do desenvolvimento de competências como a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos e geométricos, bem como raciocinar matematicamente, explorando situações problemáticas, procurando regularidades, fazendo e testando conjecturas e formulando generalizações. Estas referências surgem recorrentemente em vários temas do Currículo, como *Números e Cálculo*, *Geometria* e *Álgebra e Funções*, deixando clara a ideia da transversalidade dos padrões nos diversos tópicos da Matemática e nos diferentes níveis de ensino.

Nos Programas do 1.º, 2.º e 3.º ciclos do início dos anos 90, as referências à exploração de padrões não são tão explícitas. Mas se analisarmos cuidadosamente cada um destes documentos é possível verificar que o tema atravessa os diferentes domínios temáticos.

No programa de Matemática do 1.º ciclo do Ensino Básico (ME-DGEBS, 1990), no bloco *Números e Operações*, surgem, a partir do 2.º ano de escolaridade, indicações que têm subjacente o trabalho com padrões. Por exemplo: no 2.º ano é referido que os alunos devem "explorar e usar regularidades e padrões na adição e na subtracção", "descobrir regularidades nas contagens de 5 em 5, 10 em 10", "ordenar números inteiros em sequências crescentes e decrescentes", "descobrir a regra para calcular o produto de um número por 0,1 e por 10"; no 3.º ano já temos conteúdos como "explorar e usar regularidades e padrões na adição, na subtracção e na multiplicação", "descobrir a regra para calcular o produto de um número por 100 e por 1000"; e no 4.º ano os alunos devem "descobrir a regra para obter o quociente de um número por 100 e por 1000", "descobrir a regra para calcular o produto de um número por 0,01 e 0,001" (pp. 174-177). No bloco *Forma e Espaço* sugere-se que no 2.º ano desenhem frisos em papel quadriculado e no 3.º e 4.º anos desenhem frisos e rosáceas e façam composições a partir de um padrão dado. O bloco *Grandezas e Medidas* não inclui referências que possam ser associadas ao conceito de padrão.

O Programa de Matemática do 2.º ciclo do Ensino Básico (ME-DGEBS, 1991a), apesar de não apresentar qualquer alusão aos padrões, permite-nos identificar diversas oportunidades para a sua utilização. Há, por exemplo, várias situações nos diversos temas do programa que permitem a descoberta experimental de regras, como é o caso das fórmulas dos volumes do paralelepípedo rectângulo e do cubo, do perímetro do círculo, das áreas do paralelogramo e do triângulo. Da mesma forma podemos inferir propriedades numéricas e geométricas como por exemplo os critérios de divisibilidade ou a descoberta experimental das propriedades dos paralelogramos. A evidência mais clara sobre padrões surge nos Objectivos Gerais onde são destacados procedimentos associados a este tipo de trabalho, nomeadamente, "fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, factos conhecidos…formular argumentos válidos para justificar as suas opiniões" (p.10).

Ao longo do Programa de Matemática do 3.º ciclo (ME-DGEBS, 1991b) há poucas referências ao trabalho com padrões e nenhuma delas usa especificamente este termo. No 8.º ano é mencionada a utilização de sequências, destacando-se os conteúdos "continuar sequências numéricas" (p. 32) e "…procurar o termo que vem a seguir; tentar encontrar uma lei de formação" (p. 38). Tal como foi salientado na análise do documento anterior, apesar de identificarmos apenas de forma pontual referências explícitas à temática dos padrões, tendo por base as orientações delineadas no programa, é possível criar oportunidades para desenvolver o trabalho no âmbito dos padrões.

É interessante cruzar estas ideias com a análise do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007), de forma a comparar as tendências curriculares.

No 1.º ciclo, no tema *Números e Operações* mencionam-se os termos padrões, regularidades, sequências, regra, lei de formação e sucessões. Alguns exemplos incidem na investigação de regularidades numéricas em sequências e tabelas de números e a elaboração de sequências segundo uma lei de formação. Na *Geometria e Medida* surgem referências a padrão, sequência, frisos, pavimentações e configurações. Finalmente, na *Organização e tratamento de dados* sugere-se a procura de regularidades na realização de várias experiências. No 2.º ciclo, nos temas *Números e Operações*, *Geometria* e *Organização e tratamento de dados*, é feita a articulação com o 1.º ciclo dando continuidade ao trabalho desenvolvido. São mencionados o computador e a calculadora na exploração de regularidades numéricas e surge pela primeira vez a referência ao conceito de padrão geométrico como uma forma de introduzir o pensamento algébrico. No tema *Álgebra* referem-se os termos padrões geométricos, sequências, regularidades e lei de formação. Tem aqui início o trabalho com a generalização ao pedir por exemplo para "determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação", "determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação", analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação utilizando linguagem natural ou simbólica" (p. 41). Nas orientações para o 3.º ciclo os padrões constituem um tema transversal nas actividades a propor. Nota-se uma grande articulação com os ciclos anteriores onde este tema assume um papel fundamental no estudo dos *Números e Operações* e da *Álgebra*.

Em traços gerais é possível verificar que este novo documento curricular tem referências bastante explícitas à temática dos padrões em todos os níveis de ensino que contempla, sendo notória a enfatização da sua relevância e a transversalidade nos diferentes temas matemáticos.

O estudo de padrões constitui uma oportunidade para os alunos observarem, proporem hipóteses, experimentarem e criarem. A compreensão das regularidades, com base nos dados recolhidos, permite prever o que vem a seguir, estimar se o padrão se mantém ao alterar as variáveis e continuar o padrão. Embora a referência a este tema nas recomendações curriculares seja mais evidente na abordagem à álgebra, é também sublinhado o seu contributo para o desenvolvimento do raciocínio lógico (NCTM, 2000; Palhares & Mamede, 2002; English, 2004; Mulligan, Prescott & Mitchelmore, 2004; Vale *et al.*, 2006), para o desenvolvimento de capacidades em diversas áreas da Matemática e para o estabelecimento de conexões entre essas mesmas áreas, constituindo assim um tema unificador que motiva e dá significado à Matemática (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; NCTM, 2000; Vale *et al.*, 2006; Vale *et al.*, 2009). O papel dos padrões como ferramenta pedagógica não pode ser negligenciado. O NCTM (1989) refere claramente que a exploração de padrões é uma competência fundamental e necessária para: resolver problemas; compreender conceitos e relações; investigar relações entre quantidades (variáveis); generalizar usando palavras e variáveis; construir o conceito de função.

Considerando os objectivos deste estudo, destacando-se o enfoque na resolução de problemas que conduzem à generalização, torna-se então pertinente analisar de forma mais aprofundada a relação existente entre os padrões e a resolução de problemas e entre os padrões e a álgebra.

4.2.1. Os padrões e a resolução de problemas

A visão sobre a matemática e sobre o que significa *fazer* matemática tem vindo a sofrer alterações significativas, nas últimas décadas. Evidencia-se uma perspectiva mais abrangente, do que apenas a mera consideração da matemática como um corpo de conhecimentos construído dedutivamente e caracterizado pelo rigor absoluto, emergindo a ideia da matemática como ciência dos padrões:

> A matemática revela padrões escondidos que nos ajudam a compreender o mundo que nos rodeia. Agora, muito mais do que aritmética e geometria, a matemática é uma disciplina diversificada que lida com dados, medidas e observações; com inferências, deduções e provas; e com modelos matemáticos de fenómenos naturais, do comportamento humano e dos sistemas sociais…O

> processo de “fazer” matemática é muito mais do que apenas cálculos ou deduções, envolve observação de padrões, teste de conjecturas e estimativas de resultados. (NRC, 1989, p. 31).

Estas ideias reflectem uma ênfase nos processos que devem ser valorizados na actividade matemática e não tanto nos conteúdos. *Fazer* matemática envolve descoberta, envolve a procura de padrões, o que potencia a utilização de processos não rotineiros como explorar, conjecturar, provar, modelar, simbolizar e comunicar (NCTM, 2000). Neste sentido, o papel do professor torna-se fundamental no que respeita à selecção de problemas desafiantes que permitam não só a compreensão de conceitos e processos matemáticos mas também a descoberta intuitiva de resultados, estimulando as capacidades de resolver problemas, de raciocinar e de comunicar matematicamente (NCTM, 1989, 2000; ME-DGIDC, 2007).

Polya (1945) concebe a matemática como uma actividade centrada fundamentalmente na resolução de problemas, na qual o resolvedor tem um papel activo. Não basta ao aluno dominar algoritmos, técnicas e conhecimentos factuais, é fundamental que contacte e se envolva na resolução de problemas que lhes proporcionem uma experiência matemática significativa. Da mesma forma, outros autores (e.g. NCTM, 2000; Schoenfeld, 1992) acreditam que o conhecimento matemático tem origem na actividade humana, realçando também o papel da observação e da experimentação no estudo dos padrões existentes nos sistemas definidos axiomaticamente e nos modelos de sistemas abstraídos do mundo dos objectos reais.

Para que a actividade dos alunos se assemelhe à actividade desenvolvida pelos matemáticos, devem ter a oportunidade de resolver problemas que, num nível apropriado, potenciem o estabelecimento de conjecturas e a prova. Esta componente da descoberta realça a importância da intuição como uma das principais fases na resolução de problemas. Segundo Polya (1945), para desenvolver este tipo de trabalho, é necessário promover a sistematização do raciocínio que pode ser conseguida através dos seguintes passos: trabalhar com casos particulares e concretos; passar para a formulação de conjecturas; e posteriormente proceder à sua confirmação com novos casos particulares. Deste modo, pode considerar-se que a procura de padrões é a essência do raciocínio indutivo e que, através da exploração de padrões, os alunos revelam níveis mais avançados de compreensão e vão gradualmente manifestando maior segurança na formulação de conjecturas e no estabelecimento de regras (NCTM, 1989).

É ainda pertinente salientar que, de entre os métodos heurísticos salientados por Polya (1945), destaca-se a procura de padrões como uma das mais poderosas estratégias de resolução de problemas. Este tipo de abordagem é bastante intuitiva para os alunos e contribui de forma significativa para o desenvolvimento do raciocínio, para o estabelecimento de conexões entre diversas áreas da Matemática (Abrantes *et al.*, 1999), mas principalmente, permite que se envolvam num contexto investigativo que se associa à actividade dos matemáticos.

Em síntese, através da resolução de problemas onde a procura de padrões é a estratégia fundamental, os alunos podem experienciar a utilidade da matemática e simultaneamente desenvolver o seu conhecimento acerca de novos conceitos. Este tipo de tarefas leva-os a propor e testar conjecturas, conduzindo-os posteriormente à formulação de regras e à sua formalização (Vale *et al.*, 2006).

4.2.2. Os padrões e a álgebra

Nos últimos anos a exploração de padrões tem sido realçada como uma abordagem ao ensino da álgebra, especialmente nos níveis de escolaridade mais elementares. Essa ligação é óbvia se pensarmos que a procura de padrões poderá conduzir à generalização, processo que se considera fundamental na álgebra.

A álgebra tem sido reconhecida como uma área da matemática na qual normalmente os alunos não são bem sucedidos. Este facto tem suscitado preocupação no seio da comunidade matemática, levando à procura de estratégias alternativas à abordagem da álgebra que possam inverter este quadro. Neste sentido, surgiu a exploração de padrões como um veículo para introduzir a álgebra. Mason, Johnston-Wilder e Graham (2005) referem que expressar a generalidade é uma das raízes da álgebra e a utilização de padrões como uma base para expressar a generalidade é uma abordagem cada vez mais popular (Orton e Orton, 1999).

Alterações nas políticas educativas, apontam para a análise da forma como alunos dos níveis mais elementares aprendem a generalizar e, em particular, para o desenvolvimento do pensamento algébrico (NCTM, 1989, 2000; ME-DGICD, 2007). É de referir a recomendação para que se atribua um papel fundamental à álgebra desde o momento em que os alunos iniciam o estudo da Matemática. Esta iniciativa reflecte uma inversão nas concepções de uma parte significativa da comunidade educativa no que respeita às capacidades dos alunos dos níveis mais elementares e do que será apropriado trabalhar na aula de Matemática. A caracterização de álgebra proposta pelo NCTM (2000) é elucidativa:

> A álgebra contempla as relações entre quantidades, a utilização de símbolos, a modelação de fenómenos e o estudo matemático da mudança. A palavra álgebra não é normalmente ouvida nos níveis de ensino elementares, mas as investigações e as discussões desenvolvidas por estes alunos incluem frequentemente elementos associados ao pensamento algébrico. Estas experiências representam contextos ricos para avançar na compreensão e são um importante precursor para o estudo mais formal da álgebra nos níveis de ensino posteriores. (p. 37)

Nos últimos vinte anos a investigação tem-se centrado na descoberta de métodos que favoreçam o significado dos objectos e procedimentos algébricos (Arcavi, 2003). Em particular, Blanton e Kaput (2005) defendem que a integração da álgebra nos níveis mais elementares ajuda ao desenvolvimento conceptual de uma matemática complexa no pensamento das crianças. Permite que os alunos observem e articulem generalizações e aprendam a expressá-las de forma simbólica. A utilização de tarefas que conduzam à generalização de padrões é fundamental para se atingir, de uma forma mais natural, a transição para a álgebra tradicional (Lannin, 2005; Zazkis & Liljedahl, 2002). Este tipo de tarefas constitui um veículo poderoso para a compreensão das relações entre quantidades que estão subjacentes às funções matemáticas, contribuindo assim para o estabelecimento de relações de tipo funcional (Blanton & Kaput, 2005; Warren, 2008). Por outro lado, constituem uma forma concreta e transparente de os alunos dos níveis mais elementares começarem a debater-se com as noções de generalização e abstracção.

Uma das concepções mais comuns, no seio da comunidade matemática, é a de que a álgebra é uma generalização da aritmética e, neste sentido, os conceitos aritméticos servem de base ao desenvolvimento posterior das estruturas algébricas. No entanto, muitos investigadores acreditam que a introdução da álgebra nos níveis de ensino mais elementares envolve mais do que a generalização de estruturas aritméticas. Por exemplo, Blanton e Kaput (2005) salientam, para além deste aspecto, o desenvolvimento de um pensamento de tipo funcional e da modelação matemática. Zevenbergen, Dole e Wright

(2004) referem-se a três pressupostos fundamentais do pensamento algébrico: igualdade, mudança e generalização. Por sua vez, Warren (2008) alarga o espectro da álgebra nos primeiros anos a três pontos centrais: estabelecimento de relações entre quantidades; estudo e compreensão das propriedades das operações; e estudo das relações entre as operações. Estes pressupostos estão claramente associados a abordagens algébricas, desenvolvidas em níveis de ensino mais elevados. No entanto, o processo de ensino e aprendizagem da álgebra está tradicionalmente baseado no princípio de que a aritmética deve ser ensinada antes da introdução da álgebra, já que os conceitos aritméticos constituem pré-requisitos para o desenvolvimento dos conceitos algébricos. Estudos como os que foram referidos reforçam a ideia de que os alunos beneficiariam, na sua aprendizagem, se a álgebra fosse ensinada de forma integrada com a aritmética. Segundo Nickson (2000) existe um extenso número de investigações acerca da transição da aritmética para a álgebra assumindo que a ideia de pré-álgebra, ou emergência da álgebra, está já bem estabelecida. Mas alerta para o facto de esta álgebra introdutória poder ser interpretada de formas bem diferentes, relacionadas com características associadas à natureza da álgebra propriamente dita, nomeadamente: como uma linguagem; como uma forma de pensamento; como uma actividade; como uma ferramenta; como aritmética generalizada; ou como cultura. Todas estas perspectivas são fundamentais na álgebra, mas devem ser adequadas aos alunos a quem se dirigem.

Como já se referiu, a exploração de padrões potencia o estabelecimento de conexões entre as ideias algébricas e o conhecimento prévio na aritmética (NCTM, 2000). Antes da álgebra formal, as recomendações curriculares apontam para a utilização de tarefas com padrões nas quais os alunos generalizam situações numéricas. Estas tarefas permitem, por um lado, que os alunos estabeleçam relações com o trabalho prévio no campo da aritmética (Kaput, 1999), mas também são fundamentais para promover a visão da variável como um intervalo de valores. Espera-se ainda que, através de tarefas deste tipo, sejam capazes de mais facilmente atribuir significado à linguagem e ao simbolismo usados na álgebra e nos correspondentes sistemas representacionais, como gráficos e tabelas. Com este objectivo, English e Warren (1995) defendem uma abordagem com base na exploração de padrões de forma a introduzir e desenvolver nos alunos o conceito de variável. Referem que, tradicionalmente, as variáveis são introduzidas como incógnitas em equações, nas quais não possuem a natureza variável. Além disso, a utilização de padrões proporciona aos alunos a oportunidade de observar e verbalizar as suas generalizações e registá-las simbolicamente. Sugerem ainda que este tipo de tarefas não se esgota no estabelecimento do conceito de variável, constituindo uma base de trabalho concreta e útil no trabalho com símbolos. A compreensão do significado dos símbolos algébricos formais, através da sua conexão com as quantidades que representam, pode de facto encorajar a reflexão acerca da notação utilizada, reduzindo os tradicionais erros que os alunos cometem na utilização da linguagem algébrica formal.

CAPÍTULO 5

A GENERALIZAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM PADRÕES

Neste capítulo é dada ênfase à generalização, explorando algumas concepções, associadas à sua definição, bem como aos diferentes níveis em que pode ocorrer. Posteriormente é analisada a relação entre a generalização e a argumentação, tendo como princípio o facto da validação de uma afirmação geral ser imprescindível na actividade matemática. Nas secções seguintes deste capítulo dá-se especial atenção às características associadas à generalização de padrões de repetição e de crescimento, os mais comuns na matemática escolar. Posteriormente, como as tarefas utilizadas neste estudo contemplam maioritariamente padrões de crescimento, nas duas secções que se seguem serão destacadas as estratégias e as dificuldades emergentes do trabalho de alunos com este tipo particular de padrões. O capítulo termina com uma discussão acerca da importância da visualização na capacidade de generalizar, focando aspectos como a exploração de padrões de tipo visual e as implicações da utilização de estratégias de natureza visual e não visual no estabelecimento e compreensão de generalizações.

5.1. Perspectivas sobre o processo de generalização

A generalização desempenha um papel crucial na actividade de qualquer matemático, é uma capacidade inerente ao pensamento matemático. Particularizando para o contexto curricular, podemos ainda afirmar que é um objectivo chave na aprendizagem da Matemática:

> A generalização é o coração da Matemática. Se os professores não têm consciência da sua presença e não têm por hábito propor que os alunos generalizem e expressem as suas generalizações, então não está a ocorrer pensamento matemático (Mason, 1996, p. 65).

A generalização é um objectivo fundamental no ensino e na aprendizagem da matemática, tanto como um processo como um produto. No entanto, constitui ainda um veículo para a construção de novo conhecimento, agindo como um catalisador para potenciar a aprendizagem, principalmente, no campo da álgebra.

Tratando-se de um dos grandes focos da Matemática e da educação matemática, muitos investigadores têm evidenciado interesse em caracterizar generalização, surgindo, deste modo, na literatura diferentes propostas de caracterização deste processo. Uma das descrições mais comuns sublinha que a generalização de padrões obriga qualquer indivíduo a *centrar-se em* ou *chamar a atenção para* uma possível propriedade ou relação invariante, *compreender* a regularidade, ou aquilo que é comum, e *tomar consciência* que se aplica a um contexto mais lato (Lobato, Ellis & Muñoz, 2003; Mason, Johnston-Wilder & Graham, 2005; Radford, 2006). O procedimento de aplicar um argumento, que se adequa a um conjunto restrito de elementos, a outro conjunto mais alargado que contém o anterior, torna possível definir uma expressão directa que caracteriza a propriedade identificada. Nesta perspectiva, Radford (2006) explica que a generalização algébrica de um padrão assenta na identificação de uma regularidade local que é posteriormente alargada a todos os termos da sequência e serve de garantia à construção de expressões de elementos da sequência que se mantêm para além do campo perceptual. Salientando a relevância da procura de padrões, para Kaput (1999) generalizar significa continuar a linha de raciocínio para além do caso ou casos considerados, identificando de forma explícita a regularidade entre casos, ou elevando o raciocínio a um nível onde o foco deixa de estar nos casos ou na situação iniciais passando a centrar-se nos padrões, procedimentos, estruturas e relação entre eles. Embora nestas perspectivas se enfatize, como principal objectivo, a descoberta de uma regra geral, outros autores (e.g. Davydov, 1990; Mason, 1996) sublinham a importância do movimento cíclico entre o particular e o geral durante o processo de generalização, referindo que envolve, por um lado, a identificação da generalidade em casos particulares, mas também a identificação de casos particulares na regra geral.

A generalização tem sido um tema de investigação recorrente, tanto na psicologia experimental como na Didáctica da Matemática. Uma das vertentes, associadas a este tema, que emergiu em diversos trabalhos, relaciona-se com a identificação de diferentes tipos ou níveis de generalização.

Dörfler (1991) faz uma distinção entre generalização *empírica* e *teórica*. A generalização *empírica* baseia-se no reconhecimento de elementos ou qualidades comuns aos objectos analisados. Segundo este autor, a procura de qualidades relevantes para a generalização pode ser considerada problemática ou ambígua em educação matemática.

Isto leva a que a generalização *empírica* seja criticada por falta de uma orientação específica na decisão do que é essencial para generalizar e também por se basear apenas em casos particulares. Contrastando com estas ideias, a generalização *teórica* é considerada simultaneamente intencional e abrangente. Centra-se no que Dörfler denomina de *sistema de acção*, o que significa que depois de identificados os invariantes essenciais, é feita a sua substituição por protótipos. A generalização é assim construída através da abstracção desses invariantes. Neste caso, as qualidades abstraídas são relações entre objectos em vez de objectos propriamente ditos.

Por sua vez, Harel e Tall (1991) subdividem a generalização em três categorias: (1) *expansiva*, quando o raio de aplicabilidade de um determinado esquema é expandido sem se proceder à reconstrução desse esquema; (2) *reconstrutiva*, quando o esquema existente é transformado, de forma a alargar o seu raio de aplicabilidade; (3) *disjuntiva*, quando é construído um novo esquema decorrente da mudança de contexto. Numa primeira análise, a generalização *disjuntiva* parece conduzir a uma generalização bem sucedida mas, uma vez que não são considerados exemplos anteriores como casos particulares do procedimento geral, não se encaixa no perfil da generalização cognitiva. De facto, este tipo de generalização pode ser exaustiva para os alunos com mais dificuldades, levando à construção de uma variedade de casos, em vez de procurarem um caso geral. A generalização *expansiva* é cognitivamente mais fácil do que a *reconstrutiva* mas, a longo prazo, pode ser considerada insuficiente.

No que refere à generalização, Stacey (1989) distingue entre *generalização próxima* e *distante*, tendo por base a ordem de grandeza do termo da sequência e as estratégias que estão implicadas na sua descoberta. Quando é possível determinar, de forma rápida e eficaz, um termo da sequência recorrendo a desenhos ou ao método recursivo, a generalização diz-se *próxima*. Se, pelo contrário, dificilmente as abordagens descritas anteriormente permitem o cálculo de um dado termo da sequência, implicando a compreensão e descoberta de uma regra geral, a generalização em causa é *distante*.

A pesquisa feita por García-Cruz e Martinón (1997) permitiu-lhes identificar diferentes níveis de generalização. As acções desenvolvidas pelos alunos e a forma como descobrem o invariante ao longo do processo de generalização de um padrão linear são importantes na caracterização de cada nível. Estes autores explicam detalhadamente a forma como os processos anteriores influenciam a generalização, propondo uma estratificação em três categorias. No *nível 1, actividade procedimental*, o aluno reconhece e utiliza o carácter *recursivo* do padrão linear, centrando-se na componente mais evidente e procedimental do padrão, a identificação da diferença constante entre termos consecutivos. Este tipo de abordagem permite resolver de forma bem sucedida questões de generalização próxima, através de um desenho ou através de cálculos, no entanto estas acções não são generalizáveis. No *nível 2, compreensão procedimental*, é estabelecida uma *generalização local*, ou seja, é utilizada a mesma regra na resolução de questões de *generalização próxima* e *distante*, dentro do mesmo problema. Neste caso é estabelecido o mesmo invariante para todas as questões colocadas, sendo normalmente expresso verbalmente. No *nível 3, compreensão conceptual*, o comportamento do aluno é consistente em problemas da mesma natureza, generalizando a estratégia empregue. Perante problemas diferentes mas com uma estrutura comum o aluno aplica as mesmas acções.

Para Radford (2006) a generalização algébrica desenvolve-se em três níveis: (1) *factual*, quando o foco da generalização se mantém no plano concreto, através da execução de acções numéricas que conduzem à formação de um esquema mental associado a números particulares, o que significa que o discurso não vai para além da referência a casos específicos; (2) *contextual*, quando a generalização é expressa com base em termos mais descritivos, como por exemplo *a figura seguinte*, sendo utilizadas referências claras ao contexto e aos objectos que o integram; e (3) *simbólico*, quando a generalização é descrita a partir de notação algébrica. Em síntese, a generalização *factual* surge de acções numéricas, enquanto a generalização *contextual* abstrai também os objectos dessas acções. A generalização *simbólica* envolve a compreensão e a utilização de linguagem algébrica.

Analisando atentamente as ideias de Dörfler e Radford pode-se estabelecer um paralelismo entre o significado de generalização *empírica* e generalização *factual*. Apesar de haver fortes críticas a esta forma de generalização, por ter na sua base o estudo de casos particulares, Radford (2006) sugere que a generalização *factual* pode ser um contributo fundamental para a construção de formas mais sofisticadas de generalização.

Polya (1965) também considera que normalmente a generalização não é um processo imediato mas sim gradual. Começa com tentativas, um esforço para tentar entender os factos observados, para fazer analogias e testar casos especiais. Estas tentativas iniciais poderão conduzir a uma generalização mais apurada embora nenhuma generalização seja considerada definitiva sem uma demonstração matemática sólida. Na mesma linha de raciocínio, Mason (1996) acrescenta que há dois processos complementares que estão no centro do pensamento matemático, a generalização e a *particularização*[1], ou seja, ver o geral no particular e ver o particular no geral. O processo de *particularizar* é fundamental para o pensamento matemático. Significa analisar casos especiais ou particulares de uma afirmação geral e está normalmente associado a exemplos concretos. Pode cumprir diferentes objectivos. Numa fase inicial pode ser usado para tentar perceber o significado de uma expressão ou questão mas também pode contribuir para dar sustentabilidade à generalização. Essencialmente, pretende-se clarificar o significado de uma questão ou afirmação e depois encontrar exemplos que tenham propriedades em comum, de forma a interiorizar essas mesmas propriedades. O processo de generalizar está relacionado com a identificação de padrões e propriedades comuns a várias situações e tentar expressá-los verbalmente ou simbolicamente. Generalizar envolve o estabelecimento de conexões e a sua caracterização numa afirmação sucinta a partir da qual podem ser extraídos casos particulares através da *particularização.* Apesar de estes processos, *particularização* e generalização, serem tratados isoladamente é difícil mantê-los separados. A razão de se *particularizar* é permitir e promover a generalização. As generalizações carecem de validação em casos particulares antes de se procurar um argumento convincente. Os exemplos têm assim um papel importante na familiarização com técnicas, resultados, provas e definições, sendo utilizados para ilustrar os passos de qualquer um deles. Esta proposta de Mason é partilhada por outros autores (e.g. Zazkis, Liljedahl e Chernoff, 2008) que enfatizam a importância da utilização de exemplos, embora sublinhem a necessidade de criticar o conjunto de exemplos escolhidos e refiram que algumas características dos casos particulares sejam mais úteis do que outras no reconhecimento e estabelecimento da estrutura geral.

5.2. A generalização e a argumentação

Na actividade matemática a generalização e a argumentação são processos quase indissociáveis. De acordo com Radford (2006) a generalização é um instrumento didáctico que não pode contornar a problemática da validação, sendo fundamental que os alunos formulem explicações que fundamentem a validade das suas generalizações. Nas últimas

---

[1] Mason (2005) utiliza o termo *specializing*. Neste estudo optou-se pela tradução do termo para *particularização*.

décadas, houve algumas alterações, no campo da educação matemática, no que respeita às concepções acerca da validação (Cañadas, 2007). Actualmente são considerados e aceites diferentes processos de validação aos quais estão associadas diferentes funções.

O raciocínio em geral envolve a consideração de inferências que resultam de evidências e princípios, a partir dos quais o indivíduo infere novas conclusões ou avalia conclusões propostas a partir do que já conhece (Johnson-Laird & Byrne, 1993). Há dois tipos fundamentais de raciocínio, nomeadamente, o dedutivo e o indutivo. Enquanto o raciocínio dedutivo parte de um conjunto de premissas gerais para chegar a uma conclusão lógica válida, o raciocínio indutivo parte de premissas ou observações específicas para chegar a uma conclusão ou regra geral. Deste modo as inferências dedutivas descrevem conclusões que estão implícitas na informação fornecida, enquanto as inferências indutivas acrescentam informação (Klauer, 1999).

É pertinente neste ponto proceder à distinção entre indução matemática e raciocínio indutivo. Enquanto a indução matemática contém informação acerca de todos os casos relativos a uma classe, permitindo a formação de conclusões rigorosas, o raciocínio indutivo refere-se a casos particulares que não são necessariamente válidos para toda a classe (Sternberg & Gardner, 1983). Mas, em muitas situações, as inferências indutivas são consideradas válidas e constituem uma base fundamental para entender os padrões em matemática. Neubert e Binko (1992) associaram o raciocínio indutivo à procura de padrões e relações entre números e figuras. Estes autores partilham a ideia de Polya (1965) que definiu raciocínio indutivo como aquele que surge da intuição, o raciocínio natural que nos permite adquirir conhecimento científico. Considerou ainda que este tipo de raciocínio é fundamental no ensino da Matemática constituindo um método para identificar propriedades a partir de certos fenómenos e encontrar regularidades de forma lógica. Segundo Polya (1965), o raciocínio indutivo envolve quatro fases: experiências com casos particulares; formulação de conjecturas; demonstração das conjecturas; e verificação da sua validade para novos casos particulares. Com base neste modelo, e tendo trabalhado com alunos do ensino secundário, Cañadas e Castro (2007) desenvolveram um sistema de acções de pensamento relacionando o raciocínio indutivo com a justificação de afirmações que surgiram da aplicação desse mesmo raciocínio, contemplando sete fases: (1) trabalho com casos particulares; (2) organização de casos particulares; (3) identificação de um padrão; (4) formulação de uma conjectura; (5) justificação de uma conjectura (com base em casos particulares); (6) generalização; e (7) demonstração.

O raciocínio dedutivo, ou demonstração, foi considerado durante muito tempo o único processo de validação de uma afirmação em matemática. No entanto, o contributo de alguns investigadores como De Villiers (2003) e Hanna (2000) serviu para associar outras funções à validação, nas quais podemos identificar processos indutivos. De Villiers considera as funções de verificação/convicção, juntamente com a explicação, a sistematização, a descoberta e a comunicação. Hanna junta outras três componentes ao modelo apresentado por De Villiers, nomeadamente a construção de uma teoria empírica, a exploração do significado de uma definição e a incorporação de um facto conhecido numa nova estrutura de conhecimento. Uma das funções do raciocínio indutivo é a verificação ou a explicação de uma determinada conjectura a partir de casos particulares. Parece então adequado introduzir este tipo de abordagem como forma de validação prévia ao raciocínio dedutivo que está associado aos processos de validação formal (Cañadas, 2007). Já Polya (1965) afirmava "primeiro intuir e depois provar" (p. 125).

As concepções tradicionais relativas à natureza do raciocínio matemático defendem a perspectiva da existência deste par complementar entre indução e dedução (Magnani, 2005; NCTM, 2000). Peirce (1958) discordou desta abordagem e propôs uma terceira forma de raciocínio, o abductivo. Este semiótico introduziu o processo de abdução, relacionando-o com a indução e a dedução, e sublinhou a sua importância para a construção do raciocínio indutivo. Mais recentemente, nos trabalhos de investigação em educação matemática, a abdução tem sido frequentemente referida em áreas como a álgebra (Radford, 2008; Rivera & Becker, 2007), a aritmética (Sáenz-Ludlow, 1997), a geometria (Arzarello, Micheletti, Olivero & Robutti, 1998; Pedemonte, 2001) e a resolução de problemas (Cifarelli, 1997).

Peirce (1958) associa a dedução à demonstração da validade de uma determinada propriedade, já a indução significa mostrar que uma propriedade é efectivamente operativa e atribui à abdução a função de meramente sugerir que uma propriedade poderá ser verdadeira. Assim, a abdução pode ser vista como algo prévio à indução e à dedução que têm, posteriormente, funções confirmatórias e analíticas, respectivamente. Para Abe (2003) a abdução actua como um elemento catalisador para a produção de conjecturas conduzindo à proposta de hipóteses que serão testadas. Estas hipóteses são testadas na fase de indução através da experimentação que poderá contribuir para o aumento da confiança na validade da conjectura. Em resumo, a abdução cria, a dedução explica e a indução verifica. Em conjunto, estas três formas de raciocínio garantem uma visão completa do processo de generalização.

Enquanto Peirce situa a abdução numa fase prévia à indução, visão partilhada por outros autores (Boero, Garuti & Mariotti, 1996; Pedemonte, 2001), para Arzello *et al*. (1998), os processos de abdução, indução e dedução coexistem interagindo de forma dinâmica. Neste modelo, é referido que, na geometria, os alunos transitam da conjectura para a prova no momento em que alteram as suas atitudes e modos de controlo, nas diferentes fases de exploração e selecção das relações associadas a um determinado objecto que constroem e interiorizam. Estes autores situam a abdução no "ponto cognitivo mais delicado" do seu modelo (p. 31). Referem que atravessa todo o processo que envolve as fases de conjectura e prova, fundamentando que é através da acção orientada que os alunos estabelecem conjecturas que por sua vez conduzem a afirmações condicionais e à prova, surgindo novamente quando se torna necessário argumentar.

Radford (2008) transfere esta discussão para a álgebra, considerando em particular o contexto de exploração de padrões. Este autor posiciona a abdução na fase inicial da actividade de generalização algébrica. Para melhor compreender a perspectiva deste autor, torna-se pertinente analisar a sua concepção de generalização:

> Generalizar um padrão algebricamente significa compreender uma regularidade identificada em alguns casos particulares (p_1, p_2, $p_{3, \ldots,}$ p_k), estendendo ou generalizando esta regularidade a todos os termos subsequentes (p_{k+1}, p_{k+2}, $p_{k+3, \ldots}$) e ser capaz de usar essa propriedade comum para propor uma expressão para qualquer termo da sequência (Radford, 2008, p. 84).

Considera que há diferentes aspectos a contemplar nesta definição. O processo tem início na identificação de uma regularidade local (R) em alguns elementos da sequência (S). Este passo implica que seja feita uma escolha entre o que se mantém igual e o que é diferente. Posteriormente R é então generalizada a todos os termos de S. Esta fase corresponde à abdução, ou seja, generalizou-se uma previsão que se aplica a elementos conhecidos e desconhecidos de S. Deste modo, R transforma-se na hipótese que vai ser testada e finalmente deduzida, convertendo-se numa expressão generalizada de S. Este conjunto de fases resultaram num modelo de generalização (Figura 2) que representa o percurso desde a abdução até à dedução.

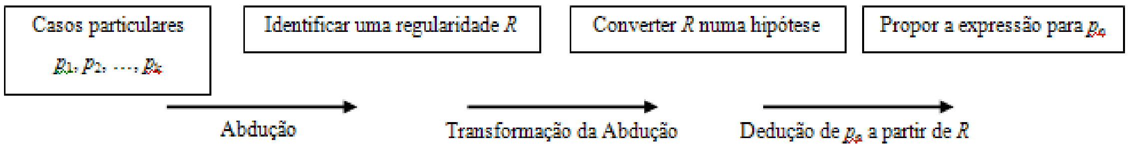


Figura 2 - Modelo de generalização algébrica de padrões (Radford, 2008)

Apesar de considerar que, na exploração de padrões, a abdução e a indução constituem duas acções inferenciais conceptualmente diferentes, Radford (2008) refere que se determinam mutuamente e que, dependendo do aluno, este processo pode percorrer sucessivas espirais até à construção e justificação de uma generalização.

Continuando no campo da álgebra, Rivera (2008) considera que a abdução não pode ser reduzida à procura de uma hipótese aleatória. Na sua opinião, envolve em simultâneo um questionamento dessa mesma hipótese recorrendo ao raciocínio indutivo. Este autor revela alguma preocupação na orientação da actividade dos alunos no que respeita à escolha de hipóteses plausíveis que possam conduzir a uma abdução completa, especialmente quando se trata da generalização de padrões. Rivera (2008) propõe um esquema dinâmico de generalização de padrões (Figura 3), diferente do apresentado por Radford (2008), no qual a abdução e a indução se situam no centro do processo de generalização, permitindo assim que uma regularidade hipotética *R* se transforme numa forma geral viável *F* depois de ter sido empiricamente testada em diferentes extensões de um dado padrão. Este novo requisito de verificar e identificar *F* como sendo a melhor inferência deixa em aberto a possibilidade de ter um esquema em espiral antes da dedução da generalização do padrão.

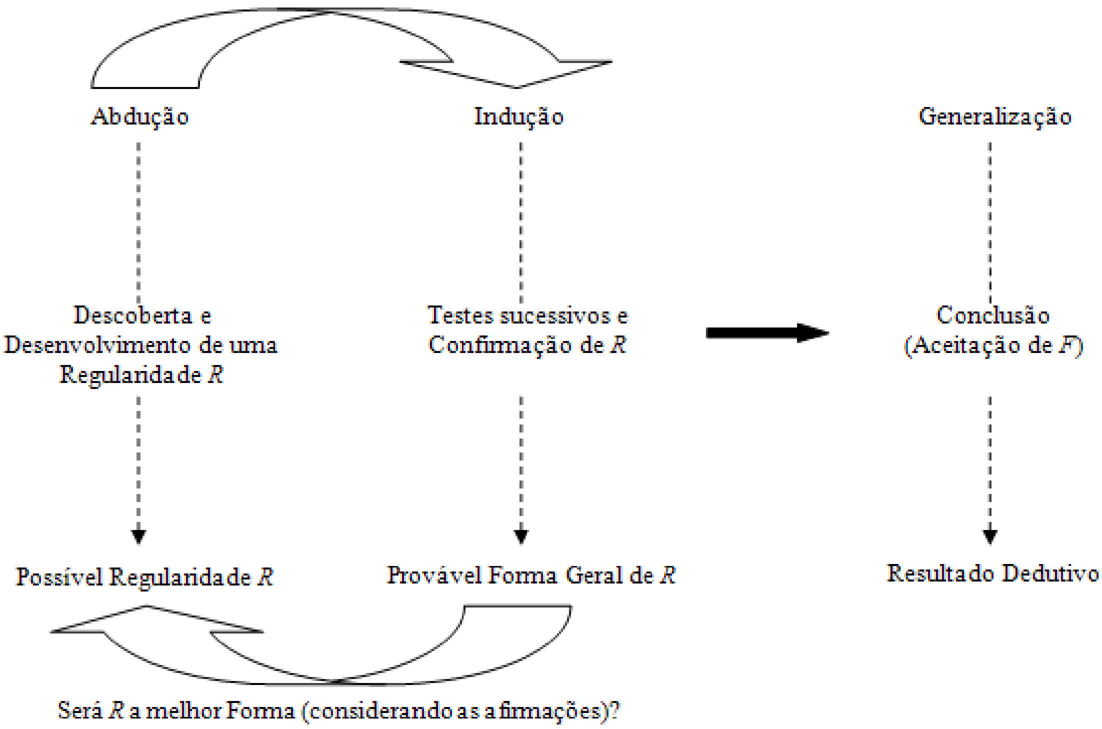


Figura 3 - Esquema de generalização de um padrão (Rivera, 2008)

Deste modo, a generalização de padrões implica uma sinergia entre abdução, indução e dedução. É necessário que os alunos: estipulem as suas conjecturas ou hipóteses acerca da possível estrutura de um padrão, à medida que vão construindo uma fórmula directa (fase abdutiva); verifiquem e testem as suas escolhas repetidamente, ao longo de várias fases (fase indutiva); e justifiquem a generalização, por exemplo visualmente (Rivera, 2008).

Há fortes evidências que indiciam que a validação de uma afirmação geral é uma tarefa desafiante e algo complexa para os alunos (Chazan, 1993; Martin & Harel, 1989), havendo muitos que propõem argumentos baseados apenas no raciocínio indutivo (Mason, 1996; Harel & Sowder, 2005). Aparentemente esta dificuldade deve-se ao foco tradicional, desde os níveis de ensino mais elementares, na procura de propriedades particulares de uma situação em vez de proceder à determinação de uma relação geral. Apesar do lugar de destaque atribuído à generalização na actividade matemática, os alunos são muitas vezes solicitados a calcular apenas um caso particular de uma situação (Mason, 1996). Desta forma a generalidade que pode emergir da análise de mais exemplos fica relegada para segundo plano. Por outro lado, também se deve considerar que o principal objectivo das tarefas de generalização nos níveis mais elementares é ajudar os alunos a desenvolver a capacidade de generalizar a partir de casos particulares, expressando a generalização por métodos que tenham significado para eles e que sejam válidos do ponto de vista da prática instrucional, como é o caso do pensamento visual. A *particularização* permite e promove a formulação de generalizações (Mason, Johnston-Wilder & Graham, 2005), no entanto este processo deve ser conduzido com alguma cautela, já que nem todos os exemplos conduzem a generalizações bem sucedidas. Há características particulares dos exemplos que são mais úteis do que outras, como um veículo para o reconhecimento da estrutura geral de um padrão, por isso é fundamental que o professor sensibilize os alunos para a procura de exemplos apropriados e promova o desenvolvimento de estratégias de *particularização* junto dos alunos (Zazkis, Liljedahl e Chernoff, 2008).

5.3. A generalização e os padrões de repetição e de crescimento

Há duas tipologias de padrão que são frequentemente referidas e utilizadas na matemática escolar: repetição e crescimento. Segundo Smith (2003) as componentes de repetição, mudança e extensão são o cerne da ideia de padrão. Considerando esta perspectiva podemos inferir que qualquer tipo de padrão é generalizável, passível de extensão. Nas secções seguintes faz-se uma análise das características da generalização envolvida na exploração de cada um dos tipos de padrão referidos.

5.3.1. Padrões de repetição

O tratamento formal dos padrões nos primeiros anos de escolaridade centra-se inicialmente nos padrões de repetição. Segundo Threlfall (1999) um padrão de repetição pode ser definido como um padrão no qual se reconhece uma unidade que se repete ciclicamente. Esta estrutura cíclica é gerada pela aplicação repetida de uma pequena parte do padrão, a chamada *unidade de repetição* (Liljedahl, 2004). Por exemplo, ABCABCABC… é um padrão de repetição com uma unidade de repetição de dimensão 3 e ABCabABCabABCab… constitui um padrão de repetição mais complexo com uma unidade de repetição de dimensão 5. No segundo exemplo variam as letras mas também os seus estilos. A variação de alguns atributos dos elementos que constituem o padrão (como o tamanho, a cor, a orientação, …), mantendo outros constantes, aumenta a complexidade de um padrão de repetição (Threlfall, 1999).

O princípio subjacente aos padrões de repetição é a sua estrutura cíclica. Segundo Liljedahl (2004) dado um padrão desta natureza, com uma unidade de repetição de dimensão *n*, a identificação do termo seguinte pode ser concretizada de duas formas: (1) há uma igualdade entre cada elemento do padrão e um dos primeiros *n* elementos; (2) há uma igualdade entre cada elemento do padrão e o elemento situado *n* posições antes dele.

Dada a diversidade de propostas associadas à exploração de padrões de repetição, Warren e Cooper (2006) propõem uma sequência didáctica que pressupõe diferentes graus de complexidade, no entanto todas as fases desta sequência são fundamentais. Os alunos devem ter a oportunidade de: (1) copiar um padrão, ou seja, reproduzir uma sequência; (2) continuar um padrão, em ambas as direcções, tendo em atenção que normalmente continuar o padrão no sentido inverso afigura-se mais difícil para os alunos, já que envolve a reversibilidade do pensamento; (3) identificar a unidade de repetição; (4) completar um padrão, o que inclui continuá-lo ou completar espaços e identificar a unidade de repetição; (5) criar um padrão; (6) traduzir um determinado padrão para outro contexto, o que possibilita o desenvolvimento da compreensão das conexões existentes entre representações equivalentes, através da identificação das diferenças e das semelhanças entre representações, essencialmente espera-se que os alunos concluam que a propriedade fundamental do padrão não se altera.

Resultados de alguns estudos têm evidenciado que o sucesso dos alunos com este tipo de padrões varia, podendo estar relacionado com o contexto em que o padrão é apresentado, com a complexidade do padrão ou até mesmo com a experiência dos alunos com tarefas desta natureza. Por exemplo, Rustigian (1976) propôs uma hierarquia associada à complexidade dos padrões de repetição, tendo estudado o desempenho de crianças entre os 3 e os 5 anos de idade. Concluiu que encontrar um movimento físico (modo activo) era mais fácil do que encontrar uma representação pictórica (modo icónico) que por sua vez era mais simples do que o critério cor. Este autor encontrou ainda uma progressão nos procedimentos: (1) não é feita referência a elementos prévios, havendo uma escolha aleatória de novos elementos; (2) repetição do último elemento; (3) utilização dos elementos prévios mas por outra ordem; (4) abordagem simétrica, reproduzindo a sequência por ordem inversa; (5) continuação deliberada do padrão, olhando para o início de forma a confirmar. Palhares (2000) desenvolveu uma investigação com crianças do pré-escolar e do 1.º ano de escolaridade no âmbito da exploração de padrões de repetição.

Verificou que, perante um padrão do tipo ABAB com diferença de cor, em geral as crianças foram capazes de o continuar e identificar padrões semelhantes na sala, no entanto a maioria revelou grandes dificuldades na tentativa de criar os seus próprios padrões. Este autor também destaca que é comum encontrar na mesma faixa etária crianças que não são capazes de produzir mais do que arranjos aleatórios e crianças que são capazes de produzir padrões com uma estrutura complexa.

Os padrões de repetição contribuem de forma significativa para o desenvolvimento de determinadas capacidades. Threlfall (1999) destaca algumas razões que estão na base da relevância atribuída a este tipo de tarefas: servem de contexto para ensinar outros conteúdos; podem conduzir às ideias de ordem e comparação se os alunos forem incitados a procurar o elemento que se segue; constituem um veículo para introduzir e interpretar símbolos, que são essenciais na álgebra, constituindo um contexto para desenvolver a capacidade de generalizar. Este autor refere ainda que a análise de um padrão de repetição envolve simultaneamente uma abordagem conceptual e procedimental, só assim é possível perceber o padrão e continuá-lo. Mas acrescenta que a percepção da *unidade de repetição* é crítica na exploração do padrão, valorizando desta forma a componente conceptual que potencia a análise e a reflexão. Warren (2008) reforça também as potencialidades dos padrões de repetição para promover a generalização. Refere que os alunos são capazes de generalizar relações entre diferentes objectos dentro de padrões de repetição e ao longo de várias repetições. Uma das estratégias mais utilizadas é a partição do padrão nas sucessivas unidades de repetição que são associadas a uma ordem e colocadas numa tabela para dar posteriormente lugar à generalização, através da análise das colunas. É possível, através desta abordagem solicitar ao aluno a descoberta de um termo colocado numa determinada posição na sequência sem ter necessidade de a continuar recursivamente. A identificação da unidade de repetição e a compreensão da estrutura global do padrão permitem ao aluno ir além do mero processo de continuação do padrão, possibilitam a abordagem à generalização distante através da descoberta imediata do termo que ocupa uma dada ordem na sequência, abrindo assim o caminho para a abstracção.

5.3.2. Padrões de crescimento

Um padrão de crescimento pode ser definido como uma sequência de números ou formas que se prolonga de forma regular (Moyer-Packenham, 2005), o que faz com que cada termo mude de forma previsível em relação ao anterior. Os alunos tendem a revelar mais dificuldades na exploração de padrões de crescimento comparativamente aos de repetição. Este facto pode dever-se a uma experiência de sala de aula que privilegia predominantemente a exploração de padrões de repetição ou pode indiciar que os padrões de crescimento poderão ser cognitivamente mais difíceis do que os de repetição (Warren, 2008). Esta situação é preocupante uma vez que, tradicionalmente, a ponte entre a aritmética e a álgebra é feita a partir dos padrões de crescimento. Os padrões de repetição são frequentemente associados ao pensamento sequencial enquanto os de crescimento se associam ao pensamento relacional. Ambos são necessários ao desenvolvimento do pensamento matemático, mas é o segundo tipo que conduz à relação entre duas quantidades variáveis, ou seja, ao pensamento funcional (Scandura, 1971). Deste modo é possível que muitos alunos sintam dificuldades na transição da aritmética para a álgebra devido à falta de experiência prévia na exploração de padrões de crescimento, revelando também dificuldades com o pensamento co-variacional.

Os padrões explorados na introdução à álgebra formal são predominantemente padrões de crescimento de natureza visual (Warren & Cooper, 2006). O contexto visual funciona como um catalisador para a utilização de diferentes abordagens, visuais e não visuais, permitindo que os alunos recorram a diversas formas de representação. Potenciam ainda a emergência de diferentes modos de *ver* o padrão apresentado, proporcionando ao professor a oportunidade de promover a comunicação na sala de aula, com o objectivo de discutir as possíveis expressões que os alunos descobrem, e o desenvolvimento do pensamento matemático através da generalização.

Na exploração deste tipo de padrões, por norma, é solicitado que os alunos encontrem uma relação entre os elementos do padrão e a sua posição e que usem esta generalização para gerar elementos noutras posições, ou seja, são motivados a pensar nos padrões de crescimento como funções em vez de se centrarem apenas na variação relativa a um dos conjuntos. Esta abordagem envolve frequentemente representações visuais, registo e organização de dados em tabelas e a identificação de uma relação entre os dois conjuntos. Este processo é bem diferente do reconhecimento de padrões feito na indução matemática

(Harel & Sowder, 2005), o objectivo centra-se na descoberta da relação funcional entre conjuntos e na exploração do conceito de variável. A complexidade deste tipo de padrões, bem como o contexto em que são propostos, proporciona frequentemente a utilização de uma grande diversidade de estratégias de generalização, podendo em alguns casos conduzir à emergência de dificuldades na exploração feita pelos alunos. Na secção seguinte são discutidas, de forma detalhada, as situações referidas.

5.4. Estratégias de generalização e dificuldades na exploração de padrões de crescimento

As ideias apresentadas nesta secção têm por base resultados de alguns estudos empíricos centrados em diferentes níveis de ensino mas com um ponto comum, a exploração de padrões de crescimento lineares e não lineares. Os padrões de crescimento proporcionam uma grande diversidade de situações que potenciam explorações muito ricas e diversificadas, para além de terem uma importância significativa na transição da aritmética para a álgebra. Estes pressupostos fundamentam o enfoque nos padrões de crescimento nesta secção e o facto de serem privilegiadas neste estudo tarefas que envolvem este tipo de padrões. Tendo já sido discutidas previamente algumas abordagens e dificuldades resultantes do trabalho dos alunos com padrões de repetição, optou-se por centrar esta discussão nos padrões de crescimento.

A maioria dos estudos que constituem o referencial teórico desta secção envolve a utilização de tarefas que apresentam uma forte componente visual, ou seja, os elementos das sequências e dos problemas apresentados aos alunos são representados visualmente, à semelhança do que acontece com as tarefas propostas neste trabalho. As estratégias de generalização aplicadas podem condicionar as eventuais dificuldades apresentadas pelos alunos. Deste modo, começa-se por apresentar algumas propostas de categorização das estratégias utilizadas na generalização de padrões, passando-se posteriormente à análise das dificuldades que emergem do trabalho dos alunos, efectuando um paralelismo com as abordagens usadas.

5.4.1. Categorização das estratégias de generalização

A generalização de um padrão é obtida através da aplicação de uma estratégia, um modo de acção, utilizado para atingir um objectivo específico, ou então através da aplicação de um “conjunto de processos utilizados por uma ordem adequada” (Backhouse, Haggarty, Pirie & Stratton, 1992, p. 90). É fundamental analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas, nomeadamente no que respeita à tipologia e à sua adequação à situação proposta, de modo a compreender a forma como pensaram.

Têm sido desenvolvidos vários estudos com o intuito de analisar e desenvolver as estratégias evidenciadas pelos alunos na resolução de problemas com padrões. Estes estudos variam nos tipos de padrão (numérico, visual, crescimento, entre outros) e envolvem populações diferentes, desde alunos dos níveis mais elementares a professores em formação (e.g. English e Warren, 1995; Lannin, Barker & Townsend, 2006; Orton e Orton, 1999; Radford, 2006; Rivera, 2007; Becker & Rivera, 2005; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999; Stacey, 1989; Zazkis & Liljedahl, 2002). Nesta secção são discutidos os resultados de alguns desses estudos destacando, em particular, as suas propostas de categorização para as estratégias de generalização.

Stacey (1989) focou a sua investigação na generalização de padrões lineares, em diferentes contextos, com alunos de idades compreendidas entre os 9 e os 13 anos, e classificou as abordagens por eles utilizadas, incluindo aquelas que conduziram a respostas incorrectas. Analisando as estratégias aplicadas pelos alunos, organizou-as em quatro categorias: *contagem*, *diferença*, *termo unidade*[2] e *linear*. Na *contagem*, os alunos totalizavam o número de elementos de um desenho correspondente ao termo da sequência solicitado. A estratégia *diferença* envolvia a utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos. A estratégia *termo unidade* consistia na utilização de um novo valor, múltiplo de um valor conhecido da sequência, assumindo implicitamente que o problema representaria uma situação de proporcionalidade directa. Nesta abordagem os alunos fixavam uma dada figura da sequência e consideravam múltiplos do número total de elementos dessa figura. A estratégia *linear* correspondia à utilização de um modelo linear para encontrar a solução, ou seja, uma expressão polinomial do 1.º grau. Neste caso os alunos revelaram compreender a necessidade de utilizar as operações adição e multiplicação bem como a ordem pela qual deveriam ser aplicadas.

Este estudo de Stacey (1989), e em particular a categorização que dele surgiu, serviu de base a outras investigações cujo enfoque se situou no estudo das estratégias de generalização utilizadas pelos alunos. Neste âmbito, destaca-se o enquadramento teórico

---

[2] Stacey (1989) utiliza o termo *whole-object*. Neste estudo optou-se pela tradução do termo para *termo unidade*.

proposto por Lannin, Barker e Townsend (2006), centrado nas estratégias aplicadas por alunos do 5.º ano de escolaridade, na generalização de problemas contextualizados. Estes investigadores também identificaram quatro categorias de estratégias: *recursiva*, *partição*[3], *termo unidade* e *explícita*. Sempre que o aluno descreve uma relação que ocorre entre valores consecutivos da variável independente, está a utilizar um raciocínio de tipo recursivo, estratégia muito frequente na resolução de problemas com padrões. Estes autores identificaram, no trabalho dos alunos, uma forma mais expedita de utilização do raciocínio recursivo, a estratégia *partição*. Neste caso, seleccionam um termo conhecido da sequência e acrescentam múltiplos da diferença entre termos consecutivos até obter o elemento pretendido. À semelhança do que sucedeu no estudo desenvolvido por Stacey (1989), também foi identificada por estes investigadores a estratégia *termo unidade*. Os alunos utilizam um termo da sequência como unidade de forma a calcular um determinado elemento, considerando múltiplos dessa unidade. Acrescentam que, quando as unidades não são elementos disjuntos, os alunos devem proceder a um ajuste do resultado, já que não se trata de uma situação de proporcionalidade directa. Finalmente, a utilização da estratégia explícita implica a construção de uma regra que permite efectuar o cálculo imediato de qualquer valor da variável dependente, conhecida a variável independente.

Num estudo prévio a este, Sasman, Olivier e Linchevski (1999) propuseram um conjunto de tarefas, a alunos do 8.º ano, com base na generalização de padrões. Estas tarefas estavam divididas em dois grandes grupos, no que respeita à sua natureza. Quatro das tarefas eram puramente numéricas, sendo apresentadas sob a forma de tabelas de valores, enquanto as restantes quatro tinham uma forte componente visual. Verificaram que os alunos recorreram a uma grande variedade de estratégias, nomeadamente: recursiva; multiplicação proporcional; decomposição do valor considerado para a variável independente; método da diferença; extensão da recursiva ($\mathrm{f}(n) = (n - k)d + \mathrm{f}(k)$, sendo d a diferença entre termos consecutivos); e regra funcional.

Destaca-se ainda, em alguns estudos (e.g. Lannin, 2005; Becker & Rivera, 2005), a utilização da *tentativa e erro* no estabelecimento da generalização. Trata-se de uma abordagem muito encorajada na resolução de problemas, principalmente em contextos numéricos. No entanto, no campo da álgebra, propor uma regra sem saber porque razão funciona, pode por vezes resultar em generalizações incorrectas, sendo assim fundamental

---

[3] Lannin, Barker e Townsend (2006) utilizam o termo *chunking*. Neste estudo optou-se pela tradução do termo para *partição*.

que os alunos tenham em consideração todas as condições do problema, compreendendo a relação entre as variáveis no contexto apresentado (Mason, 1996).

No que refere à frequência de utilização das estratégias de generalização, a literatura refere que os alunos apresentam uma tendência para generalizar recursivamente, em vez de procurarem estabelecer uma relação entre as variáveis dependente e independente (e.g. Hershkowitz, Parzysz & Dormolen, 1996; Orton e Orton, 1999). English e Warren (1995) reforçam que, uma vez tendo utilizado uma estratégia recursiva na tentativa de generalizar, os alunos apresentam geralmente relutância em descobrir uma relação funcional.

As categorizações apresentadas, embora com ligeiras variações, evidenciam a utilização de uma multiplicidade de estratégias na resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões. Esta problemática tem sido estudada por outros investigadores que classificaram as abordagens apresentadas pelos alunos usando uma perspectiva diferente, associada ao papel desempenhado pela visualização na generalização.

García-Cruz e Martinón (1997) analisaram o papel da visualização na resolução de problemas com padrões de tipo linear, trabalhando com um grupo diversificado de alunos cujas idades estavam compreendidas entre os 13 e os 18 anos. Classificaram as estratégias em: *visuais*, *numéricas* e *mistas*. O referencial de partida para esta categorização foi a definição de estratégia visual proposta por Presmeg (1986):

> Uma estratégia é considerada visual se as imagens mentais, com ou sem recurso a diagramas, desempenharem um papel fundamental na obtenção da resposta (p. 298).

Neste sentido, para García-Cruz e Martinón (1997), se a figura desempenhar um papel essencial na descoberta do invariante, representando o contexto onde se desenrolam as acções, estamos perante uma estratégia de natureza visual. Se, por outro lado, é a sequência numérica que está subjacente ao raciocínio, a estratégia passa a ser numérica. Destacaram ainda uma terceira abordagem que designaram de mista, nos casos em que os alunos usaram a sequência numérica para generalizar, recorrendo posteriormente à figura para validar o seu raciocínio.

Becker e Rivera (2005) estudaram as estratégias utilizadas por alunos do 9.º ano na tentativa de generalizar padrões lineares. Identificaram três tipos de generalização, com base na natureza da abordagem: *numérica*, *figurativa* e *pragmática*. Os alunos que utilizaram a generalização *numérica* aplicaram normalmente a tentativa e erro e não demonstraram ter conhecimento do significado dos coeficientes no padrão linear. Os *generalizadores figurativos* focaram a sua atenção nas relações entre os números da sequência e mostraram-se capazes de analisar as variáveis dentro do contexto de uma relação funcional. Aqueles que recorreram a uma generalização *pragmática* empregaram os dois tipos de estratégias, numéricas e figurativas, mostrando flexibilidade no raciocínio, e viram nas sequências de números, simultaneamente, propriedades e relações.

Embora as populações e os contextos estudados sejam diferentes, podemos identificar características comuns aos vários estudos que é pertinente salientar. As estratégias utilizadas pelos alunos são predominantemente de natureza numérica (Orton e Orton, 1999; Sasman, Olivier e Linchevski, 1999; Becker e Rivera, 2005), remetendo-nos para uma problemática já analisada que é a relutância em visualizar. Aqueles que usam esquemas visuais, associando a regra à representação visual, são normalmente mais bem sucedidos na generalização do que aqueles que começam por usar uma abordagem numérica ou do que os que recorrem à tentativa e erro (Becker e Rivera, 2005; Lannin, 2005).

É ainda fundamental salientar que as estratégias utilizadas pelos alunos, na resolução de problemas que envolvem a descoberta de padrões, condicionam o processo de generalização e estão directamente associadas ao nível de generalização atingido. Por exemplo, Radford (2008) identificou que, na exploração de padrões de crescimento de natureza visual, alguns alunos tendem a utilizar a tentativa e erro, ou seja, vão fazendo sucessivos ajustes à expressão geral, com base na substituição da variável por casos particulares, até encontrarem uma que sirva para todos. Nestes casos, o autor considera que os alunos fazem uma série de abduções que não resultam da identificação de uma regularidade entre as figuras, constituem meros palpites. Conclui por isso que se trata de um tipo diferente de indução, classificando-a como *indução simples*[4] para a distinguir de outros tipos mais sofisticados. Radford (2008) destaca ainda casos em que a utilização do raciocínio recursivo impede os alunos de encontrarem a expressão geral que representa o padrão. Apesar de considerar que existe uma generalização neste procedimento, já que através desta estratégia é possível determinar alguns termos da sequência, não a categoriza

[4] Radford (2008) utiliza o termo *naïve induction*. Neste estudo optou-se pela tradução do termo para *indução simples*.

como algébrica mas sim como aritmética. Da mesma forma, integra também nesta categoria de generalização a estratégia contagem. Na Tabela 3 é possível observar uma síntese dos diferentes níveis de generalização propostos por Radford (2008) que variam entre a *indução simples*, a generalização aritmética e a generalização algébrica, esta última estratificada em factual, contextual e simbólica.

Tabela 3 - Níveis de generalização propostos por Radford (2008)

Indução simples		
Generalização	Aritmética	
	Algébrica	Factual Contextual Simbólica

O esquema que caracteriza a *indução simples* e a generalização aritmética difere do modelo referente à generalização algébrica de padrões (Figura 2), proposto por Radford (2008). Em qualquer um dos dois casos dá-se uma passagem directa do estudo de casos particulares para a proposta de uma expressão geral que caracteriza o padrão, o que traduz a principal diferença entre estes três níveis de generalização e consequentemente entre as estratégias referentes a cada um deles.

5.4.2. Dificuldades e erros cometidos na generalização

Há alguns factores que podem ter um impacto significativo na escolha das estratégias utilizadas na generalização, independentemente da sua adequação. Há estudos que destacam este facto referindo maioritariamente características associadas à estrutura da tarefa proposta. É também importante salientar que é comum, na generalização de padrões, surgirem erros ou dificuldades no trabalho dos alunos e que, pela sua relevância, têm sido alvo de interesse na literatura. A identificação de obstáculos ao processo de generalização, bem como das razões que lhes possam estar subjacentes, é fundamental para que o professor possa promover nos alunos o desenvolvimento da capacidade de generalizar.

Lannin, Barker e Townsend (2006) identificaram um conjunto de factores que podem influenciar de forma significativa a utilização das estratégias de generalização. Propuseram três categorias alargadas que, na sua opinião, permitem prever a selecção de estratégias feita pelos alunos: (1) factores sociais, resultantes das interacções do aluno com os seus pares e com o professor; (2) factores cognitivos, associados às estruturas mentais que o aluno desenvolveu; e (3) factores associados à estrutura da tarefa. As interacções sociais têm sido sempre destacadas como um factor a ter em conta na análise do raciocínio. Em geral, as interacções resultantes do questionamento e até da argumentação relativa à utilização de determinada estratégia podem ter implicações no pensamento dos alunos. As estruturas cognitivas também desempenham um papel crucial na escolha da estratégia a utilizar. As estruturas mentais do aluno podem conduzir à assimilação de novo conhecimento à estrutura existente ou à acomodação da estrutura mental para melhor se adaptar ao novo conhecimento. No que concerne ao pensamento algébrico, as estruturas cognitivas envolvidas incluem o seu conhecimento prévio acerca das operações aritméticas, as estratégias utilizadas em tarefas anteriores, a sua motivação (NRC, 2001) e a capacidade para visualizar a estrutura da situação proposta e relacioná-la com o modelo matemático que cria (Healy & Hoyles, 1996). À medida que os alunos vão experimentando diversas estratégias em tarefas de generalização é comum depararem-se com situações que desafiam a suas estruturas cognitivas, implicando uma alteração na estratégia utilizada. Outro factor determinante é a tarefa proposta que inclui a sua estrutura matemática (por exemplo, padrão linear crescente ou padrão linear decrescente), os valores atribuídos à variável independente (por exemplo, valores próximos, distantes ou múltiplos de valores conhecidos) e a capacidade de visualizar. Em geral, Lannin, Barker e Townsend (2006) concluíram que, quando os valores de partida são próximos, os alunos tendem a utilizar regras recursivas, independentemente do tipo de padrão e da componente visual da tarefa. Embora também refiram que a análise visual da situação conduz muitas vezes a uma perspectiva diferente acerca da relação recursiva, promovendo a associação entre a regra proposta e as características do contexto. Já os alunos que baseiam o seu raciocínio apenas em valores numéricos têm normalmente pouca noção acerca da relação entre a lei que encontraram e o contexto do problema. Quando os valores de partida são múltiplos de termos conhecidos da sequência, os alunos tendem a aplicar a estratégia *termo unidade* para padrões lineares crescentes e a estratégia *partição* para padrões lineares decrescentes. Nesta situação, os autores mais uma vez destacam a influência da visualização. Referem que os alunos com dificuldades no campo visual aplicam incorrectamente a estratégia *termo unidade* enquanto aqueles que revelam maiores capacidades visuais reconhecem a necessidade de ajustar a estratégia no caso de não se tratar de um modelo de proporcionalidade directa. A utilização de valores de partida distantes pode encorajar a aplicação de estratégias explícitas, embora em diferentes vertentes. Em alguns casos, alunos com dificuldades em visualizar a situação proposta recorrem à tentativa e erro para chegar à generalização, centrando o seu raciocínio em relações numéricas e negligenciando o contexto.

A aplicação indevida da proporcionalidade directa, principalmente na exploração de padrões de tipo linear, tem sido mencionada em vários estudos (e.g. Becker e Rivera, 2005; Lannin, Barker & Townsend, 2006; Noss, Healy & Hoyles, 1997; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999; Stacey, 1989). A análise aprofundada deste fenómeno aponta para duas situações que podem estar na base deste tipo de raciocínio. Por um lado a utilização de um contexto de resolução estritamente numérico, fazendo com que as variáveis sejam manipuladas sem significado. É comum neste tipo de tarefas a utilização de tabelas que acabam por ser tratadas de forma rotineira sem que haja uma análise significativa das estruturas subjacentes. Outro factor relaciona-se com a proposta de generalização para "números apelativos" (Sasman, Olivier & Linchevski, 1999, p. 5), ou seja, números que são múltiplos de elementos já conhecidos na sequência.

O raciocínio recursivo que inevitavelmente está associado a este tipo de tarefas é também por vezes utilizado de forma desadequada, principalmente quando se trata de concretizar uma generalização distante. Um dos casos em que a regra recursiva é aplicada erradamente pode ser simbolizado por $f(n) = n \times d$, sendo d a diferença entre termos consecutivos. Mais uma vez o facto de o raciocínio ser traduzido de forma exclusivamente numérica não permite que o aluno conclua que seria necessário proceder a um ajuste no final deste cálculo para que a regra se aplicasse ao contexto proposto (Lannin, Barker & Townsend, 2006; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999). Um outro aspecto que deve ser salientado na utilização do raciocínio recursivo é por vezes a tendência dos alunos em revelarem uma fixação por este método. O raciocínio recursivo tem limitações, especialmente nas questões de generalização distante. Os alunos analisam apenas a variação de uma das variáveis em vez da relação funcional entre duas variáveis (Noss, Healy & Hoyles, 1997; Orton & Orton, 1999; Stacey, 1989). Salienta-se que, no estudo conduzido por Orton e Orton (1999), para além de utilizarem predominantemente o raciocínio recursivo, os alunos aplicavam-no a padrões de tipo linear e quadrático, neste último caso usando o método das segundas diferenças mas muitas vezes sem sucesso. A tendência para a aplicação de uma abordagem recursiva pode ser influenciada pela estrutura da tarefa. Se a diferença entre termos consecutivos não for constante e sofrer alterações drásticas a relação recursiva já não será tão óbvia (Noss, Healy & Hoyles, 1997).

Sasman, Olivier e Linchevski (1999) destacaram a importância de as tarefas contemplarem números não apelativos como uma forma de contornar a tendência de utilização da proporcionalidade directa, sugerindo por exemplo a utilização de números primos. Mas esta proposta provocou a emergência de mais uma estratégia de generalização desadequada. Não podendo aplicar a proporcionalidade directa, alguns alunos procederam à decomposição do valor dado de forma a poderem recorrer a valores familiares, o que simbolicamente pode ser traduzido por $f(n) = f(a) + f(b) + f(c)$ sendo $n = a + b + c$.

O foco nos aspectos numéricos do padrão, mesmo quando é apresentado em contexto visual, é muitas vezes um entrave à generalização (Noss, Healy & Hoyles, 1997). Mason (1996) observa que há uma tendência para construir tabelas de valores das quais é deduzida uma fórmula geral, nem sempre correcta, com base na análise de um ou dois casos. Este autor sugere que devem ser dadas oportunidades aos alunos para explorar diversos tipos de padrões sendo utilizada a visualização e a manipulação de figuras para facilitar a dedução da generalização.

O raciocínio funcional revela-se complexo para muitos alunos, especialmente alunos dos níveis mais elementares (Stacey & MacGregor 1995; Warren 2000, 2008). As dificuldades associadas a este tipo de raciocínio residem essencialmente na não utilização de linguagem apropriada para descrever a relação, na tendência para usar uma estratégia recursiva em qualquer tipo de generalização, na incapacidade de visualizar ou completar espacialmente os padrões e na utilização da tentativa e erro em vez da generalização algébrica.

Alguns autores dão sugestões que podem contribuir para que os alunos ultrapassem ou minimizem estas dificuldades. Healy e Hoyles (1996) identificaram que o estabelecimento de uma conexão de natureza visual entre o contexto do problema e a representação simbólica correspondente é um factor determinante na atribuição de significado a regras de tipo explícito. Analogamente, para Swafford e Langrall (2000) e Zazkis (2001) solicitar que os alunos analisem diferentes valores para a variável independente, testando números cada vez maiores, pode promover a utilização de um raciocínio explícito. Stacey e MacGregor (1995) sublinharam a importância de utilizar tarefas que diminuam a ênfase na relação recursiva, tentando que os alunos identifiquem a conexão entre as variáveis independente e dependente com o objectivo de contactarem com relações de tipo explícito.

5.5. A visualização na generalização de padrões

Os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) recomendam, de forma clara, a integração de estratégias visuais nas experiências matemáticas dos alunos, em todas as áreas de conteúdo. No entanto, não é uma tarefa fácil. Por um lado, a maioria dos alunos associam a matemática à manipulação de números, expressões numéricas e algoritmos, o que pode contribuir para a desvalorização da visualização. Por outro lado, o professor deve ter em consideração que há muitas formas de *ver* (Duval, 1998). Os alunos podem fazer uma interpretação icónica das figuras ou então observarem-nas e interpretarem-nas do ponto de vista matemático.

A teoria de Duval (1998), acerca da apreensão de uma figura em geometria, é igualmente útil para compreender a forma como os alunos exploram padrões visuais em álgebra. De acordo com este autor, as características visuais são apreendidas de duas formas: *perceptualmente* e *discursivamente*. A apreensão perceptual das figuras ocorre quando estas são vistas como um todo, como um objecto único. Na apreensão discursiva é identificada a disposição espacial dos elementos que compõem a figura, quer individualmente ou em relação uns com os outros, como uma configuração de objectos que se relacionam por intermédio de um atributo ou propriedade invariante. A dificuldade que muitos alunos apresentam na formulação de generalizações, associadas a padrões de tipo visual, relaciona-se com a forma como interpretam as figuras da sequência, associando-as por vezes a meros desenhos, o que significa que observam as figuras perceptualmente. Nestes casos, como não conseguem descobrir a estrutura do padrão, há um clara preferência pela utilização de estratégias de natureza não visual, trabalhando antes num contexto numérico. Deste modo, a identificação de uma regra geral para padrões deste tipo implica uma apreensão das figuras de natureza discursiva, reconhecendo a estrutura do padrão com base na disposição dos elementos que o constituem.

Quando Duval (1998) refere que há vários modos de *ver* uma figura está a referir-se à percepção cognitiva da mesma. A passagem da apreensão perceptual, observando os objectos como um todo, para a apreensão discursiva, observando os objectos por partes, é um indicador de mudança na percepção cognitiva da figura. No contexto dos padrões de tipo visual, os alunos que são capazes de analisar, de forma discursiva, as figuras podem fazê-lo de diferentes modos. Por um lado podem identificar conjuntos de elementos disjuntos que são conjugados de forma a construir a figura inicial, dando assim lugar a uma *generalização construtiva* (Rivera & Becker, 2008). Mas, por outro lado, podem observar a existência de subconfigurações que se sobrepõem, contando alguns elementos mais do que uma vez e que posteriormente são subtraídos, o que significa que a generalização formulada é de tipo *desconstrutivo* (Rivera & Becker, 2008). Vários estudos têm concluído que os alunos têm tendência para utilizar mais as generalizações de tipo construtivo do que as de tipo desconstrutivo (e.g. Rivera & Becker, 2008; Taplin, 1995), já que esta última categoria envolve um nível cognitivo superior no que refere à visualização.

Mesmo quando os alunos são capazes de apreender discursivamente as figuras, é necessário ter em conta a complexidade das mesmas que pode condicionar o estabelecimento da generalização. Sasman, Olivier e Linchevski (1999) fazem uma distinção entre *figuras transparentes* e *não transparentes*. No primeiro caso, a regra que caracteriza o padrão está subjacente, de uma forma evidente, na estrutura das figuras, o que não acontece nas figuras não transparentes, nas quais a regra não é facilmente descoberta através da mera observação das figuras da sequência. Nesta situação é pertinente pensar em estratégias que possam auxiliar os alunos a identificar o padrão visualmente e consequentemente a generalizar. Rivera (2007) sugere que os alunos devem ser encorajados a manipular e transformar as figuras em formas mais simples e logo mais fáceis de reconhecer, o que reflecte uma mudança cognitiva no que refere à apreensão das figuras (Duval, 1998). Outra estratégia sugerida por Rivera (2007) envolve um processo simétrico de contagem. Os alunos devem ser capazes de identificar simetria nas figuras apresentadas e posteriormente concentrar-se em apenas uma das partes da figura analisada para efectuar a contagem, aplicando a mesma acção às partes da figura que apresentam as mesmas características.

Há vantagens claras na utilização de capacidades visuais na resolução de problemas em álgebra. Por um lado, o estabelecimento de generalizações baseadas no estudo de padrões visuais permite que os alunos a contactem com a componente dinâmica da construção conceptual dos objectos e conceitos matemáticos (Rivera, 2007). Por outro lado, as estratégias de generalização visuais potenciam frequentemente a formulação de uma diversidade de expressões para o mesmo padrão, o que não seria possível se fosse utilizado um método numérico. Esta situação proporciona, de forma natural, a discussão acerca do significado de expressões equivalentes em matemática, contribuindo para que os alunos concluam que há diferentes modos de representar o mesmo padrão. É importante salientar que, mesmo nos casos em que as sequências são apresentadas em contextos visuais, as preferências dos alunos variam entre estratégias de tipo visual e não visual. Aqueles que recorrem a abordagens visuais tendem a atribuir, mais facilmente, significado às expressões geradas do que os alunos que limitam a sua resolução à manipulação de números, usando estratégias como a tentativa e erro ou o método recursivo (Becker e Rivera, 2005).

Frequentemente, no trabalho com padrões, os professores assumem que há apenas uma maneira de formular uma generalização que seja algebricamente útil, ou seja, que conduza a uma expressão geral. Esta situação acontece geralmente nas tarefas que envolvem a exploração de padrões numéricos. Dörfler (2005) defende que aquilo que os alunos sabem e o que resulta da sua percepção contribui significativamente para a forma como desenvolvem ou constroem o seu conhecimento acerca de um objecto matemático. Neste sentido, é crucial que o professor crie oportunidades para a utilização de estratégias visuais e não visuais, através da discussão das abordagens privilegiadas pelos alunos promovendo o desenvolvimento do raciocínio e do espírito crítico.

CAPÍTULO 6

METODOLOGIA

Este capítulo está organizado em duas grandes secções. Na primeira apresenta-se um enquadramento teórico relativo às metodologias de investigação quantitativa, qualitativa e mista, focando características, pontos fortes e limitações de cada uma. Na segunda secção são descritas e fundamentadas as opções metodológicas que orientam o estudo.

6.1. A investigação em Educação

A investigação de natureza quantitativa foi, ao longo de vários anos, a abordagem dominante nos estudos desenvolvidos nas áreas das Ciências Humanas e das Ciências da Educação. Os pressupostos gerais deste tipo de investigação assentam na ideia de que o mundo social pode ser estudado da mesma forma que o mundo natural, procurando-se conhecer os factos e as causas associados aos fenómenos sociais, independentemente dos estados subjectivos dos sujeitos. Os métodos utilizados pelos investigadores quantitativos são similares aos aplicados nas ciências experimentais, orientados para a procura de relações causa-efeito e para a medição de variáveis isoladas. Embora se reconheça o contributo e a relevância deste tipo de investigação em diversas áreas, como é o caso da educação, são identificadas algumas limitações, nomeadamente ao nível do estudo de fenómenos educacionais complexos, como é, por exemplo, o caso dos processos cognitivos. Sendo este tipo de fenómenos indissociáveis dos respectivos contextos, as suas componentes não podem ser estudadas isoladamente, o que implica que os métodos quantitativos sejam insuficientes nestas situações. A investigação qualitativa surge assim com a pretensão de dar resposta a algumas das limitações apresentadas pela abordagem quantitativa, utilizando métodos como observações dos sujeitos em períodos de tempo prolongados e em contexto natural, entrevistas e documentos que permitam analisar os processos de pensamento. Nesta abordagem contempla-se a complexidade do mundo social, o permanente estado de mudança em que se encontra e a possibilidade de existência de múltiplas interpretações da realidade, sendo assim impossível estabelecer leis semelhantes às das ciências naturais e generalizar os resultados obtidos com uma amostra a uma população.

Estes dois tipos de investigação sustentam concepções distintas acerca da realidade e da natureza do conhecimento, sendo frequentemente definidos como opostos e incompatíveis (Shaffer & Serlin, 2004). No entanto, começa a emergir a ideia de integração destas duas abordagens com o objectivo de potenciar os pontos fortes de ambas e superar as suas limitações. A metodologia de carácter misto salienta a complementaridade dos métodos quantitativos e qualitativos deixando cair a ideia de dualidade (Creswell, 2003; Tashakkori & Teddlie, 2003). As abordagens quantitativa e qualitativa oferecem perspectivas e interpretações diferentes da realidade, dando assim resposta a questões de natureza distinta, o que permite a investigação de múltiplos fenómenos dentro do mesmo estudo. Partindo do pressuposto que tanto os números como as palavras são elementos essenciais na interpretação e compreensão do mundo que nos rodeia, a investigação de tipo misto pode ser interpretada como uma solução para a tensão criada pela comunidade de investigadores no que refere à dualidade entre as investigações quantitativa e qualitativa.

A escolha da metodologia a adoptar num estudo é condicionada por vários aspectos. Creswell (2003) sugere que este processo envolve três questões centrais: (1) *Que paradigma é seguido pelo investigador?*; (2) *Quais as estratégias de investigação mais adequadas?*; e (3) *Que procedimentos de recolha e análise de dados vão ser utilizados?*. Nesta perspectiva, torna-se pertinente clarificar os princípios orientadores que estão na base da selecção de uma metodologia de investigação, desde o paradigma que lhe está associado, passando pelas estratégias de investigação adoptadas e culminando com os métodos de recolha e análise de dados aplicados. O *paradigma* corresponde à forma como o mundo é interpretado e tem associados determinados pressupostos filosóficos que orientam o pensamento e a acção do investigador (Mertens, 1998). Estes pressupostos contemplam a natureza da realidade em estudo bem como a natureza do conhecimento e a relação entre o investigador e o objecto do estudo (Lincoln & Guba, 2000). A escolha da estratégia, ou do *design* de investigação, é naturalmente condicionada pelos princípios filosóficos subjacentes ao estudo e que, por sua vez, determina os procedimentos e as técnicas a utilizar na obtenção e tratamento da informação (Figura 4).

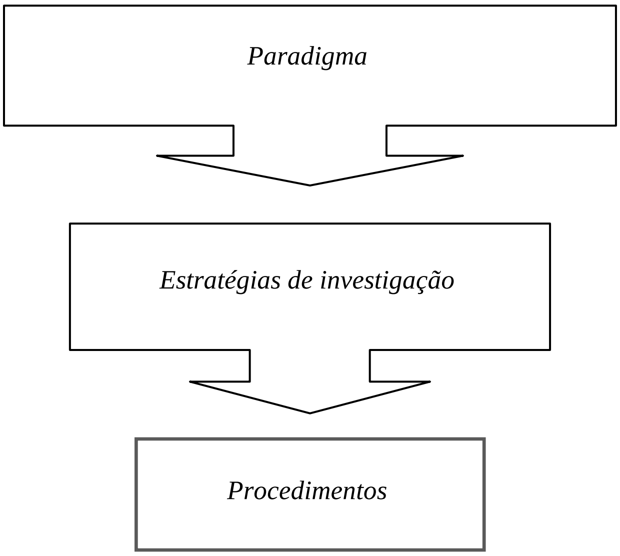


Figura 4 - Pressupostos subjacentes à escolha de uma metodologia de investigação

6.1.1. A investigação quantitativa

Na investigação de carácter quantitativo, o investigador centra-se exclusivamente na quantificação dos dados e no controlo cuidadoso das variáveis empíricas. Este tipo de investigação envolve frequentemente a utilização de amostras de grande dimensão e o recurso a procedimentos estatísticos para efectuar o tratamento e a análise dos dados. Os estudos quantitativos centram-se na medição e na análise de relações causais ou correlacionais entre variáveis (Denzin & Lincoln, 2000).

A investigação quantitativa tem sido orientada por dois *paradigmas*, numa primeira fase o *positivista* e mais recentemente o *pós-positivista*.

O *positivismo* “reflecte uma filosofia determinista na qual as causas determinam os efeitos ou resultados obtidos” (Creswell, 2003, p.7). Na base deste paradigma está o pressuposto de que o estudo do mundo social se assemelha ao estudo do mundo natural, com aplicação das mesmas regras e dos mesmos procedimentos. O teste de uma teoria ou a descrição de uma experiência é feito com recurso à observação e à medição, de forma a efectuar previsões e poder controlar variáveis externas. A compreensão dos factos envolve generalizações que podem ser aplicadas a situações e contextos semelhantes e que são articuladas por leis de causa-efeito (Guba & Lincoln, 1994). Os positivistas defendem a existência de uma verdade única, uma realidade objectiva que prevalece independentemente da percepção humana. A constante procura pela objectividade resulta na necessidade de distanciamento entre o investigador e o objecto do estudo de forma a assegurar que a validade da investigação não seja comprometida. Desta forma, os positivistas acreditam poder separar estas duas entidades, assumindo-as assim como independentes. Espera-se que o investigador tenha um papel neutro, sendo capaz de estudar um fenómeno sem o influenciar ou ser influenciado por ele e de conduzir o questionamento de forma unidireccional (Guba & Lincoln, 1994). O paradigma *pós-positivista* emergiu do reconhecimento de algumas limitações associadas à perspectiva *positivista*, nomeadamente no que respeita à noção de verdade absoluta do conhecimento. Enquanto os positivistas aceitam a existência de uma realidade objectiva, passível de ser completamente conhecida, os pós-positivistas rejeitam esta possibilidade, considerando que a realidade, apesar de objectiva, pode apenas ser parcialmente conhecida (Lincoln & Guba, 2000). Esta posição tem em consideração a subjectividade associada aos fenómenos sociais, principalmente ao comportamento humano, tornando-se por essa razão impossível conhecer totalmente a realidade em estudo. Um dos principais pressupostos do paradigma *positivista* tem por base a verificação de teorias, o que significa que os dados são recolhidos com o intuito de apoiar uma lei pré-definida. No entanto, os pós-positivistas consideram que a teoria deve ser testada, sugerindo que se trata de uma conjectura que corre o risco de ser invalidada (Creswell, 2003; Lincoln & Guba, 2000).

Apesar de existirem alguns princípios que diferenciam os paradigmas *positivista* e *pós-positivista*, estas duas perspectivas têm vários pontos em comum e ambas têm fundamentado e orientado a investigação quantitativa (Lincoln & Guba, 2000). Os dois paradigmas defendem que as relações de causa-efeito associadas aos fenómenos em estudo podem ser observadas, identificadas e generalizadas, e enfatizam ainda o papel do investigador como sendo objectivo e não influenciado pelos fenómenos.

As estratégias ou *designs* de investigação estão directamente associados à forma como o investigador irá intervir em campo para proceder à recolha dados e informações necessárias à sua pesquisa. No âmbito dos estudos quantitativos, e usando como critério a lógica interna do processo de investigação, ou seja, o modo como são validadas as hipóteses, é possível distinguir entre *estudos experimentais* e *não experimentais* (McMillan & Schumacher, 2001). Nos estudos ditos experimentais, o investigador manipula as experiências a que os sujeitos são expostos, controlando sistematicamente determinadas variáveis. Esta manipulação passa por fazer variar a variável independente, impondo um tratamento experimental, e pelo controlo de variáveis que podem concorrer com a variável independente na determinação dos efeitos da experiência. Posteriormente, o investigador procede a comparações entre sujeitos que se enquadram nas condições definidas e outros que não cumprem essas mesmas condições ou então que não foram expostos ao mesmo tratamento. Uma das principais características dos estudos experimentais é a investigação de relações de causa-efeito entre as variáveis manipuladas e os resultados obtidos. Podemos distinguir vários *designs* de investigação com características experimentais, mas os mais comuns são o *experimental puro* e o *quase-experimental*. No primeiro caso, o investigador selecciona aleatoriamente os elementos que constituem os diferentes grupos, o que, no caso de se tratar de uma amostra de grande dimensão, contribui para minimizar as diferenças entre os sujeitos antes de se aplicar a experiência. Esta opção permite posteriormente que o investigador conclua que os resultados não estão relacionados com eventuais diferenças entre sujeitos, no início e durante o tratamento. O *design* quase-experimental tem várias semelhanças com o *design* anterior, nomeadamente o facto de procurar determinar relações causa-efeito e de existir uma manipulação directa de variáveis. No entanto, neste caso, não se procede a uma escolha aleatória dos sujeitos envolvidos no estudo. Os *estudos não experimentais* são adequados a situações em que o investigador pretende conhecer e descrever um fenómeno ou encontrar relações entre variáveis, mas sem proceder à manipulação das condições da experiência.

Os procedimentos mais utilizados na recolha e análise de dados quantitativos reflectem princípios da perspectiva *positivista*, sendo privilegiado o método científico ou de natureza experimental, à semelhança do que sucede nas ciências naturais. O investigador quantitativo procura fragmentar e delimitar os fenómenos estudados em categorias mensuráveis que possam ser aplicadas a todos os sujeitos ou alargadas a contextos similares, para posteriormente proceder à descoberta de relações e ao desenvolvimento de descrições estatísticas. Assim, os procedimentos utilizados neste tipo de investigação incidem na "utilização de medidas estandardizadas para que a multiplicidade de perspectivas e experiências dos sujeitos se enquadrem num número limitado de categorias pré-determinadas às quais são atribuídos números" (Patton, 2002, p. 14). Nesta perspectiva, os métodos de recolha de dados utilizados com maior frequência nos estudos quantitativos são: questionários, entrevistas estruturadas, testes e observações estruturadas.

6.1.2. A investigação qualitativa

A investigação de natureza qualitativa é utilizada quando se pretende obter uma descrição detalhada de um determinado contexto. Um estudo qualitativo pode ser genericamente definido como:

> Um tipo de investigação que recorre a múltiplos métodos e onde a abordagem ao tema em estudo é de natureza interpretativa e naturalística. Isto significa que os investigadores qualitativos estudam os objectos em contextos naturais, tentando perceber, ou interpretar os fenómenos de acordo com os significados que as pessoas lhes atribuem. Na investigação qualitativa a utilização e recolha de uma diversidade de materiais empíricos (...) permitem descrever momentos problemáticos e rotineiros nas vidas dos indivíduos. (Denzin & Lincoln, 2000, p. 2).

O principal objectivo do investigador qualitativo é o de compreender, de forma aprofundada, o que os sujeitos pensam. Isto implica que o investigador passe períodos de tempo normalmente alargados com os sujeitos, no seu contexto natural, propondo questões de natureza aberta e garantindo os registos das suas respostas. Dado o detalhe pretendido nos estudos de natureza qualitativa, as amostras seleccionadas são de pequena dimensão e a sua escolha assenta em critérios específicos, com o objectivo de obter informação aprofundada acerca do problema em estudo (Bogdan & Biklen, 1994).

Os fundamentos da investigação qualitativa assentam no *paradigma interpretativo* (Erikson, 1986), no entanto há autores que também fazem referência ao *paradigma construtivista* (Guba & Lincoln, 1994) ou até mesmo ao *fenomenológico* (Patton, 2002), que têm fortes semelhanças entre si e são por isso muitas vezes encarados como sinónimos. Em contraste com os pressupostos positivistas que realçam a existência de uma realidade única e objectiva, os construtivistas adoptam uma posição relativista assumindo a possibilidade de emergência de múltiplas realidades, igualmente válidas e passíveis de serem descobertas (Mertens, 1998). Essencialmente procuram entender a experiência humana, defendendo que a realidade é socialmente construída (Mertens, 1998), ao contrário do que é defendido pelos positivistas que encaram a realidade como uma entidade singular externa. Os pressupostos construtivistas promovem uma abordagem hermenêutica, considerando que o significado é algo que apenas é revelado através de uma reflexão aprofundada. Esta reflexão pode ser estimulada pela relação estabelecida entre investigador e participantes e está naturalmente imbuída de subjectividade. O investigador e o objecto do estudo estão interactivamente ligados de tal modo que os resultados são gerados dentro do contexto da situação que enquadra a investigação, tornando-se quase impossível diferenciar causa e efeito (Guba & Lincoln, 1994; Denzin & Lincoln, 2000). É esta interacção que permite ao investigador obter um conhecimento detalhado, através da condução de um diálogo constante e da interpretação dos fenómenos que vão ocorrendo. Neste paradigma destaca-se a impossibilidade de separar a realidade objectiva da pessoa que a experiencia, que a processa e descreve, sendo concebida como uma construção social. Este é um dos pontos-chave na distinção entre *positivismo*/*pós-positivismo* e *construtivismo*. A grande finalidade do investigador qualitativo é a interpretação dos significados que outros indivíduos têm acerca da realidade, salientando o desenvolvimento do conhecimento construído socialmente, em contraste com a visão *positivista*/*pós-positivista* que enfatiza a verificação de teorias e a existência de uma única perspectiva da realidade. Há outras características, associadas à generalização de resultados e ao estabelecimento de relações causais, que distinguem os paradigmas subjacentes às investigações quantitativa e qualitativa. Os construtivistas não contemplam a existência de relações de causa-efeito e não estão interessados na generalização de resultados, defendendo inclusivamente que os problemas e as soluções relativos a um dado contexto não são extensíveis a outros (Patton, 2002).

Os estudos qualitativos abrangem todas as situações em que as preocupações do investigador são orientadas para a procura de significados pessoais, para o estudo das interacções entre indivíduos e contextos, assim como para a compreensão de formas de pensar, atitudes e percepções dos participantes. Este tipo de situações implicam uma visão holística do fenómeno em estudo e conduzem à obtenção de dados de natureza narrativa, sendo o investigador o principal veículo da recolha de dados (Denzin & Lincoln, 2000). Apesar das múltiplas propostas de tipologias para os *designs* de investigação associados à metodologia qualitativa, salientam-se como os mais habitualmente utilizados: *narrativa*; *estudo etnográfico*; *estudo de caso*; *estudo fenomenológico; investigação-acção*; e *teoria fundamentada* (Creswell, 2003; Denzin & Lincoln 2000). Os *designs* destacados têm uma estrutura interactiva e envolvem o conhecimento e descrição do contexto do estudo, a ilustração de diferentes perspectivas acerca dos fenómenos e uma revisão contínua das questões orientadoras ao longo do trabalho de campo (McMillan & Schumacher, 2001).

O foco da investigação qualitativa assenta essencialmente nos processos e nos significados e o enquadramento de um estudo desta natureza deve ser descrito de forma detalhada, o que implica a procura de informação acerca do contexto e dos participantes (Denzin & Lincoln, 2000). Estas características levam o investigador a utilizar vários métodos de recolha de dados, de natureza interactiva, e implicam um envolvimento personalizado bem como uma presença prolongada no contexto. As técnicas mais representativas nos estudos de natureza qualitativa são: *observações*, *registos de observações*, *entrevistas*, *documentos* e *artefactos* (Bogdan & Biklen, 1994; Lincoln & Guba, 2000). No entanto, há outras formas de recolha de dados que complementam as referidas e que contribuem para a interpretação e para a triangulação dos dados, como é o caso das gravações áudio e vídeo.

As observações permitem recolher notas de campo acerca dos comportamentos e das actividades desenvolvidas em contexto natural. Os registos das observações podem ser não estruturados ou semi-estruturados, no caso de existirem questões pré-definidas a orientar a observação do investigador. Dependendo dos objectivos da investigação, o grau de envolvimento do investigador no contexto é variável, podendo assumir diferentes papéis no que refere à sua actuação como observador. O tipo de interacção estabelecida com os participantes no estudo, aquando da recolha de dados, define se o investigador é um observador não participante ou participante. Embora a observação permita ao investigador recolher dados que resultam do contacto directo com o contexto em estudo, nem sempre é possível compreender os fenómenos na sua plenitude e, neste caso, as entrevistas constituem um método que pode colmatar esta limitação. Normalmente, nos estudos qualitativos, as entrevistas são não estruturadas ou semi-estruturadas de forma a possibilitar a adequação da linha das questões aos significados que os participantes atribuem às situações. As fontes documentais também constituem um contributo fundamental para um conhecimento mais aprofundado do contexto em estudo. O acesso a documentos oficiais e documentos produzidos pelos participantes permite que o investigador adquira outras perspectivas acerca do contexto e das dinâmicas a ele associadas que podem complementar a informação recolhida através das observações e das entrevistas.

6.1.3. A investigação mista: integração das metodologias quantitativa e qualitativa

Ao longo de mais de um século que os defensores dos paradigmas de investigação quantitativo e qualitativo têm estado envolvidos numa profunda discussão. Destes debates foram emergindo puristas em ambos os lados. Cada uma destas facções vê os seus paradigmas como sendo os ideais para a investigação e defende a tese da incompatibilidade. Nesta perspectiva, a combinação de abordagens quantitativas e qualitativas num mesmo estudo é inaceitável, já que se considera que a integração de dados e métodos de natureza diferente implica um conflito ontológico e epistemológico. Esta guerra dos paradigmas (Tashakkori & Teddlie, 2003), como ficou conhecida, foi ultrapassada na década de 90 através da proposta de uma abordagem pragmática, surgindo assim a investigação mista que começou gradualmente a ocupar o seu lugar como terceira grande abordagem metodológica na investigação, a par com a quantitativa e a qualitativa. Das discussões e controvérsias associadas ao suposto antagonismo dos princípios subjacentes ao *positivismo* e ao *construtivismo*, emergiu assim uma ideia quase consensual de que o paradigma que melhor caracteriza a investigação mista é o *pragmatismo* (Creswell, 2003; Tashakkori & Teddlie, 2003). Esta posição reflecte a importância da utilização de abordagens diversificadas e da valorização do conhecimento objectivo bem como do subjectivo. Os pragmáticos acreditam que, independentemente das circunstâncias, podem ser aplicados, simultaneamente e no mesmo estudo, métodos quantitativos e qualitativos. Estes princípios levaram a que muitos dos investigadores que recorrem à investigação mista adoptassem o *pragmatismo* como o paradigma mais adequado às suas necessidades. Deste modo, este tipo de investigação não tem a pretensão de substituir qualquer uma das outras abordagens, passa antes pela mediação entre as disputas quantitativas e qualitativas, procurando o equilíbrio entre estas duas vertentes, através da rentabilização das potencialidades e da redução das limitações de cada uma. Se idealizarmos uma linha contínua com a investigação quantitativa de um lado e a qualitativa do outro, a investigação mista abrange o conjunto de pontos entre elas.

Uma das grandes limitações apontada à investigação de natureza quantitativa é o facto de frequentemente negligenciar características associadas a fenómenos humanos, como o interesse dos intervenientes, a caracterização da acção humana em contextos específicos e o contexto histórico da situação em estudo, o que acaba por ter implicações nos resultados. Deste ponto de vista, a abordagem quantitativa tem sido por vezes criticada por desumanizar o contexto do estudo, focando apenas aspectos do comportamento humano que são repetitivos e previsíveis (Cohen & Manion, 1996). As técnicas de investigação qualitativas colmatam esta fraqueza, procurando compreender os fenómenos na perspectiva dos sujeitos. No entanto, esta abordagem está carregada de subjectividade fazendo com que factores como a precisão, o rigor e a credibilidade sejam por vezes postos em causa.

Embora sejam apontadas algumas limitações a estas metodologias de investigação, não se pode deixar de assinalar o seu importante contributo. A investigação quantitativa adequa-se ao teste de teorias e ao desenvolvimento de afirmações universais, fornecendo um panorama geral da situação em estudo. Apesar de negligenciar a realidade das situações, permite chegar a resultados passíveis de generalização. Por outro lado, a abordagem qualitativa permite ao investigador obter um conhecimento aprofundado do contexto em estudo embora não seja passível de generalização. Este tipo de investigação adequa-se à exploração de fenómenos em contextos específicos, articulando os conhecimentos e percepções dos participantes e gerando conceitos e teorias que dizem apenas respeito ao contexto do estudo.

Com base nestas impressões torna-se fundamental a adopção de uma perspectiva pragmática em investigação, uma forma racional de ponderar os prós e os contras das abordagens quantitativa e qualitativa, deixando o investigador numa posição privilegiada para combinar estratégias que se complementam. Quando se contempla a recolha e integração de dados qualitativos e quantitativos no mesmo estudo, os resultados da investigação podem ser enriquecidos de uma forma que não seria viável utilizando apenas uma das metodologias anteriores (Tashakkori & Teddlie, 2003). Greene, Caracelli e Graham (1989) destacam cinco razões que fundamentam a relevância da metodologia mista em investigação: (1) *triangulação*, porque permite ao investigador analisar a convergência dos resultados obtidos através da utilização de diferentes métodos e *designs* no estudo do mesmo fenómeno; (2) *complementaridade*, já que os resultados obtidos através da aplicação de um dos métodos podem enriquecer, ilustrar e clarificar os resultados obtidos por outro método; (3) *iniciação*, a integração dos dados pode conduzir à descoberta de paradoxos ou contradições, gerando novas linhas de pensamento ou a reformulação das questões de investigação; (4) *desenvolvimento*, os resultados obtidos através da aplicação de um dos métodos podem dar informações pertinentes que condicionem as opções metodológicas relacionadas com o método subsequente; e (5) *expansão*, permitindo alargar o alcance do estudo, através da utilização de métodos diversificados que dão resposta a questões de natureza diferente. A combinação das abordagens quantitativa e qualitativa, tendo por base as potencialidades de cada uma, resulta na utilização simultânea de dois tipos de investigação que se complementam, pondo assim de parte a concepção radical de incompatibilidade.

A metodologia de tipo misto requer a recolha, análise e interpretação de dados quantitativos e qualitativos num mesmo estudo ou numa série de estudos que investigam o mesmo fenómeno (Creswell, 2003). Como referem Johnson e Onwuegbuzie (2004) "a lógica de questionamento inclui a utilização da indução (ou descoberta de padrões), da dedução (teste de teorias e hipóteses) e da abdução (descoberta de um conjunto de explicações que ajudem a compreender os resultados, confiando na sua adequação) " (p. 17). A ideia fundamental na metodologia mista é a integração de métodos quantitativos e qualitativos. Dependendo dos objectivos do estudo esta combinação pode ser efectuada de diversas formas, determinando o tipo de *design* a utilizar (Figura 5). Por exemplo, os dados podem ser recolhidos de forma concorrente ou sequencial, dando ou não ênfase a uma das metodologias, quantitativa ou qualitativa, e os dados podem ser integrados em apenas uma ou em várias fases do processo de investigação (Creswell, 2003; Johnson & Onwuegbuzie, 2004).

	Concorrente	*Sequencial*
Igual prioridade	QUAL + QUANT	QUAL → QUANT QUANT → QUAL
Predominância de um paradigma	QUAL + quant QUANT + qual	QUAL → quant qual → QUANT QUANT → qual quant → QUAL

Figura 5 - Matriz dos *designs* de investigação mista

No campo da investigação educacional, Creswell (2003) propõe uma tipologia que distingue diferentes *designs* dentro da metodologia mista. Este autor apresenta seis *designs* fundamentais, três sequenciais (analítico[5], exploratório e transformativo) e três

[5] Creswell (2003) utiliza o termo *explanatory*. Neste estudo optou-se por utilizar a tradução do termo para *analítico*.

concorrentes (triangulação, integrado[6] e transformativo). Cada um deles varia de acordo com: a utilização ou não de uma abordagem teórica explícita; o tipo de implementação (a recolha de dados pode ser sequencial ou concorrente); a prioridade atribuída às componentes quantitativa e qualitativa; a fase em que os dados são analisados e integrados (separadamente, transformados ou relacionados); e a natureza dos procedimentos utilizados. Para melhor compreender as características destes seis *designs*, bem como o que os distingue, passa-se à descrição sucinta de cada um, tendo por base a perspectiva de Creswell (2003):

A abordagem *sequencial analítica* caracteriza-se por uma fase inicial de recolha e análise de dados quantitativos seguida da recolha e análise de dados de natureza qualitativa. A prioridade é usualmente atribuída à fase quantitativa do estudo. A análise de dados é feita de forma relacional e a integração dos dados ocorre no momento de interpretação da informação. O principal objectivo deste *design* incide no recurso aos dados qualitativos de forma a contribuir para a argumentação e interpretação de resultados do estudo quantitativo. Esta abordagem pode ser especialmente útil na fundamentação de relações e/ou resultados imprevistos, emergentes do estudo quantitativo efectuado inicialmente, sendo para isso utilizados os dados qualitativos recolhidos na fase seguinte. A utilização de uma abordagem teórica específica é opcional.

O *design sequencial exploratório* tem muitas semelhanças com o *design* anterior. Decorre em duas fases, sendo a prioridade atribuída à primeira fase do estudo e pode ou não ser implementado com base numa teoria pré-estabelecida. Em contraste com a abordagem *sequencial analítica*, neste modelo os dados qualitativos são recolhidos e analisados na primeira fase, seguindo-se a recolha e análise de dados de natureza quantitativa. Deste modo a prioridade é atribuída à componente qualitativa do estudo. A integração dos dados recolhidos nas duas etapas ocorre geralmente na fase de interpretação dos resultados. A informação de natureza quantitativa é utilizada para complementar a interpretação dos dados qualitativos. O principal foco deste *design* é a exploração aprofundada de fenómenos específicos. Considera-se que a sua aplicação se adequa a situações como: a análise de relações quando as variáveis do estudo não são conhecidas; refinar e testar uma teoria emergente; o desenvolvimento de novos instrumentos de

[6] Creswell (2003) utiliza o termo *nested*. Neste estudo optou-se por utilizar a tradução do termo para *integrado*.

avaliação, partindo de uma análise qualitativa e culminando na generalização dos resultados a uma população específica.

No modelo *sequencial transformativo* também existem duas fases distintas, ocorrendo uma após ter finalizado a outra. No entanto, neste caso, dependendo dos objectivos do investigador, qualquer um dos métodos, quantitativo ou qualitativo, poderá ser utilizado na primeira fase do estudo e a sua prioridade pode ser desigual e atribuída a qualquer um deles ou, em alguns casos, é também viável que nenhum método predomine sobre o outro. A integração dos dados acontece na fase de interpretação da informação. Ao contrário das abordagens sequenciais descritas nos dois primeiros casos, o *design sequencial transformativo* tem subjacente uma perspectiva teórica específica que orienta o estudo. O objectivo fundamental deste modelo é aplicar os métodos que melhor se enquadram na perspectiva teórica do investigador. A utilização das duas fases permite ao investigador aplicar sucessivamente diferentes perspectivas ou entender na sua plenitude um fenómeno ou processo em constante mudança, como resultado de estar a ser estudado.

A abordagem *concorrente de triangulação* é provavelmente a mais familiar dos seis modelos propostos por Creswell (2003). Os métodos quantitativos e qualitativos são aplicados separadamente de forma a colmatar as limitações apresentadas por um dos métodos com os pontos fortes do outro. A recolha dos dados quantitativos e qualitativos ocorre numa só fase do estudo. A prioridade atribuída aos métodos é usualmente a mesma, mas na prática pode ocorrer que uma das abordagens seja privilegiada. Neste tipo de design, a integração dos dados recolhidos ocorre na fase de interpretação da informação. Esta interpretação pode conduzir à convergência dos resultados, reforçando assim o conhecimento emergente do estudo, ou servir para fundamentar a falta de convergência que eventualmente possa ocorrer. O modelo *concorrente de triangulação* é seleccionado quando se pretende utilizar dois métodos diferentes com o intuito de confirmar ou validar resultados dentro do mesmo estudo.

Tal como no modelo apresentado anteriormente, o *design concorrente integrado* contempla uma única fase de recolha de dados, acedendo simultaneamente a informação de natureza quantitativa e qualitativa. No entanto, nesta abordagem há um método predominante que orienta o estudo e no qual se integra o método com menor prioridade. Os dados associados ao método com menor predominância podem auxiliar na resposta a uma questão de natureza diferente ou permitir a obtenção de informação de um outro ponto de vista. Os dados recolhidos a partir dos dois métodos são misturados na fase de análise dos resultados do estudo. Este *design* não tem necessariamente uma perspectiva teórica orientadora e pode ser utilizado com uma diversidade de propósitos: obter uma perspectiva mais abrangente acerca do tema em estudo; estudar diferentes grupos ou etapas dentro de um só estudo; e utilizar um dos métodos para enquadrar o outro.

No *design concorrente transformativo,* tal como no *sequencial transformativo,* o investigador utiliza uma abordagem teórica específica que se reflecte no objectivo do estudo ou nas questões que o orientam. Este modelo contempla características dos *designs concorrentes de triangulação* e *integrado*. Existe apenas uma fase de recolha de informação onde dados de natureza quantitativa e qualitativa são recolhidos em simultâneo. Pode predominar um dos métodos ou, em alguns casos, não haver predominância. A integração dos diferentes tipos de dados ocorre normalmente na fase de análise, embora também se registem casos em que a integração dos dados ocorre na fase de interpretação.

A metodologia mista possibilita que a tradicional dualidade entre a investigação qualitativa e quantitativa seja ultrapassada, na qual não se contempla a combinação de métodos. O estabelecimento da ponte entre os paradigmas quantitativo e qualitativo, permite deste modo gerar uma multiplicidade de *designs* que se adequam ao estudo de uma grande diversidade de situações.

6.2. Opções e procedimentos de carácter metodológico

6.2.1. Investigação mista: design concorrente integrado

Há vários aspectos que orientam a selecção de uma metodologia de investigação, no entanto um critério decisivo nessa escolha prende-se com a natureza das questões em estudo. As questões de investigação são um reflexo do problema que o investigador deseja pesquisar, representando uma extensão do objectivo central do estudo (Johnson & Onwuegbuzie, 2004). Neste caso, pretende-se compreender o modo como alunos do 6.º ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais. Para atingir este propósito foram delineadas questões de investigação que, pela sua natureza, podem ser subdivididas em dois grupos, qualitativas e quantitativas. As questões com uma forte componente qualitativa são abertas, evolutivas e não direccionadas (Creswell, 2003). Este tipo de questões centra-se na descoberta, na exploração de processos e na narração de experiências. Desta forma, as questões de natureza qualitativa estão tipicamente associadas a descrições e a sua formulação utiliza frequentemente os termos *como* e *porquê*. As questões referentes à investigação quantitativa tendem a ser objectivas e mais específicas do que as qualitativas, procurando dar resposta a perguntas que começam normalmente com as palavras *qual* ou *quais*.

No presente estudo, há uma intenção clara em analisar e descrever particularidades como o tipo de estratégias aplicadas pelos alunos, as dificuldades emergentes do seu trabalho e a influência da visualização no seu desempenho. Qualquer um destes fenómenos, pela sua complexidade, implica a utilização de uma abordagem de investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), já que a sua compreensão envolve a construção de descrições minuciosas, a exploração de processos e a descoberta de relações, com base nas experiências vividas pelos participantes. Para cumprir este propósito, ao longo do estudo, foi proposta uma sequência de tarefas centradas na exploração de padrões visuais. Tarefas desta natureza têm características particulares que as tornam desafiantes para os alunos, já que promovem a procura de relações, o estabelecimento e teste de conjecturas, servindo ainda como veículo para desenvolver tópicos matemáticos específicos, bem como o raciocínio e a capacidade de resolver problemas (Smith & Stein, 1998; Vale & Pimentel, 2005). Tendo em conta que os alunos envolvidos neste estudo não tinham qualquer tipo de experiência na exploração de tarefas deste tipo e simultaneamente por questões operacionais, já que os alunos estavam dispostos em mesas de dois na sala de aula, optou-se por desenvolver este trabalho em pares. Após a resolução de cada tarefa, foi promovida uma sessão de discussão, orientada pela investigadora, para que os alunos pudessem reflectir acerca do trabalho desenvolvido, sendo apresentadas e analisadas diferentes estratégias de resolução, relacionando-as entre si, e discutidas abordagens desadequadas às situações problemáticas apresentadas. Neste sentido, considerando que a compreensão conceptual dos alunos pode ser condicionada por esta intervenção, esta fase de resolução e discussão das tarefas será designada de experiência de ensino. Após esta fase, achou-se que seria relevante perceber qual o impacto das tarefas exploradas durante o estudo na capacidade de os alunos generalizarem. Para isso, tornou-se fundamental recorrer a uma descrição de natureza quantitativa que permitisse compreender, de forma objectiva, a sua evolução.

A natureza do problema em estudo implica essencialmente que os dados recolhidos sejam ricos em pormenores descritivos, privilegiando-se desta forma o paradigma interpretativo. Mas, a necessidade de enriquecer a caracterização dos fenómenos envolvidos no estudo e de clarificar a relação entre a evolução dos alunos e a experiência de ensino vivida, deu lugar à integração de uma componente quantitativa. Assim, tendo por base os pressupostos anteriores, optou-se por uma metodologia de investigação mista, predominantemente qualitativa.

No âmbito da metodologia mista há uma grande diversidade de *designs* de investigação, o que se atribui à multiplicidade de formas de combinação das abordagens quantitativa e qualitativa. De facto, para proceder à selecção do *design* mais adequado ao estudo, o investigador deve tomar duas decisões prioritárias: (1) se pretende ou não conduzir o estudo dentro de um paradigma dominante; e (2) se as fases quantitativa e qualitativa são sequenciais ou concorrentes. No entanto, para que uma metodologia seja considerada mista os dados devem ser misturados ou integrados num dado momento do estudo, seja na definição de objectivos, na escolha dos procedimentos de recolha de dados ou na fase de análise e interpretação dos dados. Tendo por base estes critérios, considerou-se que neste estudo seria adequado utilizar uma metodologia de carácter misto, dando ênfase à componente qualitativa. A necessidade de perceber qual o impacto da experiência de ensino no desempenho dos alunos, fundamenta a integração de uma dimensão quantitativa no trabalho. Os resultados obtidos nessa fase permitem, por um lado, dar resposta a uma questão de natureza diferente, mas também contribuem para clarificar e complementar a descrição de fenómenos mais complexos, associados à vertente qualitativa. Pretende-se ainda que a informação recolhida nas diferentes fases do estudo seja integrada no momento de interpretação dos dados. As características descritas anteriormente são próprias de um *design* de investigação *concorrente integrado* (Creswell, 2003).

Para melhor fundamentar os procedimentos metodológicos utilizados ao longo do estudo, é fundamental identificar qual a estratégia de investigação adoptada em cada uma das abordagens, qualitativa e quantitativa.

Segundo Yin (1989) a escolha de um *design* de investigação é condicionada por diversos factores, entre eles o tipo de questões formuladas, o grau de controlo que o investigador exerce sobre as variáveis e o foco estar ou não centrado em acontecimentos que ocorrem no momento do estudo. Neste caso, o modo como o problema está formulado implica a compreensão de um fenómeno específico bem como das razões que o fundamentam. Por outro lado, considerando que se trata de uma experiência de ensino, o controlo sobre as variáveis em jogo é muito reduzido. Nesta perspectiva, a construção de estudos de caso constitui uma estratégia que se adequa a este estudo (Merriam, 1988; Yin, 1989).

Merriam (1988) descreve o estudo de caso como uma estratégia de investigação de carácter descritivo e não experimental. Salienta ainda quatro características essenciais à definição deste *design*: (1) *particularista*, o estudo centra-se numa situação, num programa, num acontecimento, num fenómeno ou pessoa específica; (2) *descritivo*, o investigador recolhe dados que lhe permitem fazer uma descrição detalhada do objecto em estudo; (3) *heurístico*, o estudo enriquece e clarifica a compreensão do leitor; e (4) *indutivo*, os dados orientam e condicionam o conhecimento que emerge do estudo. Em síntese, o estudo de caso é definido como uma descrição holística e analítica de um fenómeno específico (Merriam, 1988) e é particularmente útil quando se pretende efectuar uma descrição detalhada das experiências vividas pelos participantes, o que implica que o investigador desenvolva o seu estudo em contexto natural e recorra a múltiplas fontes de evidência (Cohen & Manion, 1996).

Considerando os objectivos deste trabalho, reforça-se a pertinência da utilização de uma abordagem de estudo de caso. Neste caso, houve necessidade de se proceder à selecção de duas turmas onde se pudesse desenvolver a experiência de ensino mas, para compreender o problema de forma detalhada e fazer uma análise aprofundada das questões que orientam o estudo, foi necessário seleccionar apenas alguns elementos de cada turma. No entanto, apesar de a atenção incidir sobre as vivências dos alunos escolhidos, a sua evolução não pode ser analisada de forma descontextualizada, por isso a reflexão acerca dos acontecimentos vividos deve contemplar o ambiente de ensino e aprendizagem que estes alunos integram, neste caso a turma a que pertencem.

Os estudos de caso podem ser utilizados com diferentes propósitos, o que motivou alguns autores a construir tipologias relacionadas com as possíveis abordagens (Stake, 1994; Yin, 1989). Por exemplo, Yin (1989) refere que os estudos de caso podem ser: (1) *exploratórios*, quando são utilizados na definição de questões e hipóteses que servirão de base a um estudo posterior, ou seja, procede-se a um estudo piloto que fornece informação preliminar acerca do objecto que se está a investigar; (2) *descritivos*, se o objectivo passa pela descrição detalhada de um fenómeno associado a um contexto específico; ou (3) *analíticos*, se os resultados assentam em relações causa-efeito, de forma a explicar como ocorreram os fenómenos, sendo usualmente aplicados na formulação de novas teorias ou teste de teorias já existentes. Neste estudo foram acompanhados quatro pares de alunos, em contexto de sala de aula, com a pretensão de analisar e compreender a forma como resolvem problemas associados à descoberta de padrões em contextos visuais, o que implica a construção de uma descrição rica e detalhada e a respectiva interpretação. De acordo com a tipologia proposta por Yin (1989), estes estudos de caso são essencialmente *descritivos*, de natureza interpretativa.

Para compreender o impacto da experiência de ensino no desempenho dos alunos, ao nível da capacidade de generalizar, procedeu-se à implementação de um teste, antes e após a intervenção, a todos os alunos das duas turmas seleccionadas, de forma a efectuar uma análise estatística inferencial dos resultados. Neste caso, tratando-se de turmas, torna-se impossível efectuar uma selecção aleatória dos elementos que as constituem o que significa que esta abordagem está associada a um *design quase-experimental* (McMillan & Schumacher, 2001). De forma a garantir algum controlo sobre a validade das conclusões, foi ainda seleccionada uma terceira turma, cujos elementos foram submetidos ao pré-teste e ao pós-teste mas que não participaram na experiência de ensino.

A Figura 6 esquematiza a dinâmica do *design concorrente integrado* aplicado neste estudo.

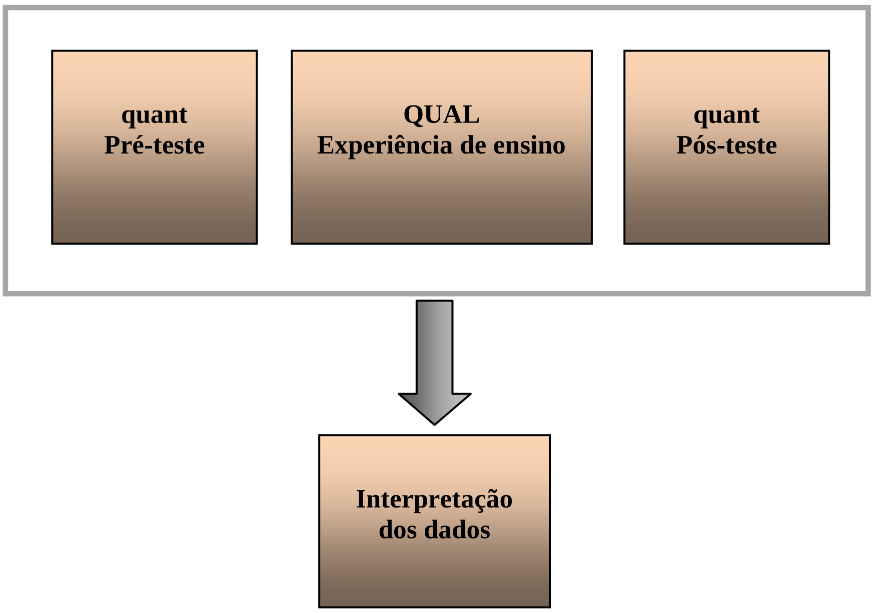


Figura 6 - Esquema do *design* concorrente integrado usado no estudo

Optou-se por combinar uma componente qualitativa e interpretativa, centrada na construção de estudos de caso, com uma componente quantitativa, centrada na obtenção de resultados relativos a indicadores de desempenho. Neste estudo a abordagem qualitativa orienta o rumo da investigação, sendo-lhe por isso atribuída predominância. Ao longo da investigação foram recolhidos, através da aplicação de diversos procedimentos, dados de natureza diferente que foram integrados na fase de interpretação.

6.2.2. Participantes e escolha dos casos

Nesta investigação participaram duas turmas do 6.º ano de escolaridade, de duas escolas do Ensino Básico, do distrito de Viana do Castelo. A escolha deste nível de ensino é fundamentada por duas razões: o interesse da investigadora em trabalhar com alunos que não tivessem, até ao momento, tido contacto com a álgebra formal; e assegurar que os alunos estivessem já integrados nos contextos turma e escola, tendo gradualmente completado esse processo ao longo do ano lectivo anterior.

Como não era objectivo do estudo investigar a prática profissional, não havia um interesse explícito na procura de um professor com características particulares, apenas a preocupação em solicitar a participação de profissionais que valorizassem este tipo de experiência e apresentassem disponibilidade em colaborar. A escolha das turmas também não obedeceu a um critério estabelecido previamente, simplesmente se pretendeu garantir que os professores tivessem acompanhado os alunos no ano lectivo anterior ao estudo, tendo assim conhecimento de características relevantes relacionadas com atitudes e capacidades.

Participaram também neste estudo os alunos de uma terceira turma, de outra escola do mesmo distrito, que constituíram o grupo de controlo. Procurou-se que esta turma tivesse características o mais próximo possível das apresentadas pelas duas turmas envolvidas na experiência de ensino, no que refere à heterogeneidade de desempenho dos alunos e ao contexto envolvente que contempla tanto a escola como a comunidade.

O estudo de caso não segue uma lógica de amostragem, envolve antes uma escolha criteriosa que permita ao investigador maximizar aquilo que pode aprender acerca do fenómeno que está a investigar. O propósito fundamental da construção de um estudo desta natureza é compreender um caso específico, não havendo pretensão em utilizar este conhecimento para explicar outros casos (Stake, 1994). Neste contexto, o número de casos adequado ao estudo deve ser planeado com base no número de replicações teóricas e descritivas que o investigador gostaria de ter (Yin, 1989). Atendendo às características do presente estudo, procurou-se definir um número de casos que constituísse uma dimensão de trabalho a que a investigadora pudesse dar resposta. Assim, após a ponderação criteriosa das necessidades do estudo e das implicações emergentes das fases de recolha e análise de dados, optou-se por estudar quatro pares de alunos, dois de cada turma.

A escolha dos casos é de extrema importância neste tipo de investigação e deve ser orientada pela necessidade de obter informação rica e detalhada acerca dos fenómenos em estudo. No que respeita à selecção dos casos relativos a este estudo, qualquer um dos alunos das duas turmas representava uma possibilidade, tornando necessário o estabelecimento de alguns critérios, de modo a proceder a uma escolha adequada aos objectivos da investigação. Segundo Stake (1994) o investigador deve utilizar critérios bem definidos para que a amostra seleccionada o conduza à compreensão aprofundada do problema a investigar. De forma a assegurar esta condição, foram considerados três critérios fundamentais na escolha dos alunos caso: a assiduidade, uma razoável capacidade de expressão escrita e oral e também a predisposição para participar no estudo. O tempo disponível pelo investigador e o acesso ao campo são muitas vezes limitados, por isso torna-se necessário seleccionar casos que apresentem disponibilidade e estejam receptivos à investigação. Por outro lado, é também crucial que os alunos tenham facilidade e propensão para comunicar, quer por escrito quer oralmente, já que se pretende conhecer e compreender a forma como pensam e aquilo que sentem ao longo da experiência.

Para além dos critérios anteriores, considerou-se também relevante assegurar a diversidade de percursos ao nível da forma de explorar as tarefas propostas. Este critério acabou por condicionar o momento de selecção dos alunos-caso que só foi efectuada após a exploração da primeira tarefa, no final de Novembro de 2006.

Os professores envolvidos no estudo desempenharam um papel fundamental na escolha dos casos. Ambos conheciam bem as suas turmas e as características de cada um dos seus alunos. Neste sentido, contribuíram com informações cruciais relativas aos critérios que orientaram esta selecção. Após a análise da primeira tarefa e discussão prolongada com cada um dos professores, foram seleccionados dois pares em cada turma. Na turma A a opção recaiu sobre a Carla e a Margarida, o António e o Daniel, quanto à turma B, os pares escolhidos foram a Diana e a Andreia, a Tânia e o Gonçalo. Por questões éticas, garantiu-se o anonimato dos participantes, sendo-lhes atribuídos nomes fictícios.

Apesar de neste estudo se ter optado por analisar pormenorizadamente dois pares de alunos em cada uma das turmas seleccionadas, deve-se no entanto considerar que a forma como cada um deles reage às experiências propostas é influenciada pelas suas vivências e pelo contexto que os rodeia, nomeadamente a turma que integram. Deste modo, para além da caracterização de cada um dos pares em foco, era fundamental conhecer as principais características das duas turmas, de forma a relacionar os resultados obtidos no contexto envolvente. A caracterização detalhada de cada um dos casos e das turmas em que se inserem é apresentada nos Capítulos 8, 9, 10, 11, 12 e 13.

6.2.3. Recolha de dados

Devido à complexidade do estudo e à sua natureza mista, houve necessidade de diversificar os procedimentos e instrumentos a aplicar na recolha de dados, adequando-os às respectivas componentes, quantitativa e qualitativa.

A construção de estudos de caso, apesar de não estar directamente associada a um processo particular de recolha de dados, implica a utilização de múltiplas fontes de evidência (Yin, 1989). Desta forma a informação foi obtida através da aplicação de vários métodos, tipicamente associados às investigações de tipo qualitativo: observações, entrevistas, documentos e gravações áudio e vídeo.

Apesar de neste estudo se privilegiar a vertente qualitativa, é também desenvolvida uma fase de natureza quantitativa, associada à avaliação do impacto da experiência de ensino na capacidade dos alunos generalizarem. Estes dados foram recolhidos através da aplicação de um teste, construído especialmente para este estudo, e que incide na exploração de tarefas ligadas à temática dos padrões.

Nesta secção são descritos detalhadamente os métodos e os procedimentos utilizados ao longo da fase de recolha de dados, encontrando-se caracterizados de uma forma breve na Tabela 4.

Observação. A observação é um método de recolha de dados fundamental em qualquer estudo de carácter interpretativo. Utiliza-se com a finalidade de descobrir interacções complexas em contextos sociais e ambiente natural. Permite ao investigador observar o comportamento humano, analisando e confrontando várias componentes em simultâneo, em particular, aquilo que é dito pelos sujeitos e a sua linguagem corporal. Através da observação o investigador acede às perspectivas dos participantes e entende o que motivou as reacções observadas bem como o seu significado naquele momento.

O grau de envolvimento do investigador no contexto é um ponto-chave na escolha do tipo de observação a efectuar. Pode assumir um papel passivo, sem qualquer interacção com os sujeitos, limitando-se a observar o que o rodeia, ou então optar por uma participação activa nas actividades desenvolvidas, contactando directamente com os participantes. Neste último caso inclui-se a observação participante que se caracteriza pela completa integração do investigador no contexto em estudo, interagindo continuamente com os intervenientes, com o intuito de aprofundar a sua compreensão acerca da forma como experienciam determinados fenómenos (Yin, 1989).

Ao longo de aproximadamente sete meses, do ano lectivo 2006/2007, a investigadora observou grande parte das aulas de Matemática das turmas envolvidas no estudo. No decorrer de cada aula, houve uma preocupação constante em efectuar o registo escrito do que ia sendo observado, que era complementado, no mesmo dia, com outras notas consideradas relevantes, procedendo-se posteriormente a uma sistematização da observação sob a forma de relatório (Anexo K). Neste estudo a investigadora assumiu o papel de observadora participante, dialogando com os alunos e apoiando-os no desenvolvimento do seu trabalho. Este tipo de observação, embora permita ter uma percepção mais consciente das perspectivas dos alunos, apresenta algumas limitações, nomeadamente a dificuldade em registar todos os fenómenos que ocorrem no contexto. Procurou-se reduzir este constrangimento recorrendo a gravações áudio e vídeo de cada uma das sessões para assim completar os registos já efectuados.

Entrevistas. A entrevista é uma das técnicas de recolha de dados mais eficazes na obtenção de informação acerca dos fenómenos em estudo. Tem um papel crucial na investigação de contextos sociais já que permite ao investigador perceber os significados que os indivíduos atribuem às experiências. O simples estabelecimento de um diálogo entre investigador e sujeito pode permitir, por exemplo, o acesso a opiniões, sentimentos, significados e processos cognitivos. Na investigação qualitativa, as entrevistas são usualmente utilizadas como uma forma de complementar as observações, possibilitando que o investigador aprofunde o seu conhecimento ou tenha mesmo acesso a determinado tipo de informações que não conseguiu observar (Mertens, 1998).

O tipo de entrevista varia quanto ao grau de estruturação, influenciado pelo controlo que o investigador pretende ter sobre as respostas dos sujeitos (Denzin & Lincoln, 2000). Neste caso optou-se por conduzir entrevistas semiestruturadas, possibilitando aos alunos a oportunidade de abordar os tópicos questionados do seu ponto de vista, permitindo-lhes assim moldar o conteúdo do questionamento (Bogdan & Biklen, 1994). Apesar de existir um guião com os tópicos que se pretendem ver abordados, há uma grande flexibilidade no que respeita à ordem pela qual as questões são formuladas, podendo inclusivamente surgir ao longo da entrevista novas questões. No entanto, a existência prévia de um conjunto de questões pré-determinadas facilitam a sistematização e posteriormente a análise dos dados (Cohen & Manion, 1996).

No presente estudo optou-se por efectuar uma entrevista semiestruturada, aos alunos-caso, após a exploração de cada uma das tarefas propostas, tendo sido assim realizadas sete entrevistas deste tipo com cada par. As questões constantes do guião, utilizado em cada entrevista, foram construídas com base nos objectivos do estudo e na análise dos relatórios efectuados no final de cada sessão observada, bem como dos relatórios produzidos pelos alunos. Em geral, as questões seleccionadas estavam orientadas para a compreensão do trabalho por eles desenvolvido, já que por vezes não eram capazes de expressar claramente por escrito a forma como tinham pensado.

A investigadora reunia com os alunos, de acordo com a disponibilidade apresentada pelos mesmos, normalmente na semana seguinte à da implementação da tarefa. As entrevistas tinham uma duração variável, dependendo da tarefa em causa, rondando, em média, os 20 minutos. Nestas sessões a investigadora começava por devolver aos alunos as folhas de resolução, sem qualquer comentário escrito de forma a não influenciar as suas respostas. O principal objectivo destas entrevistas era compreender o modo como pensaram na resolução de cada tarefa, tentando que verbalizassem o seu raciocínio. Após a realização de cada uma das entrevistas, era promovida uma discussão na turma acerca da tarefa explorada.

Todas as entrevistas foram gravadas em áudio, tendo-se procedido posteriormente à sua transcrição para facilitar a análise de dados.

Gravações áudio e vídeo. Há alguma controvérsia no que respeita à utilização de meios audiovisuais de registo em investigações naturalistas. Por exemplo, Patton (2002) refere que as gravações são um método indispensável na recolha de dados, já Lincoln e

Guba (2000) recomendam que as gravações sejam utilizadas apenas em casos excepcionais. Uma das grandes vantagens deste método é o facto de permitir o registo fiel dos dados, que não seria possível através de anotações, no entanto é necessário considerar o carácter intrusivo destes dispositivos, que podem causar a inibição dos participantes, o que neste tipo de investigação constitui uma séria limitação. Para que o investigador possa usufruir das potencialidades deste método não pode descurar a reacção dos sujeitos à sua utilização. Neste sentido, espera-se que utilize estratégias que permitam ultrapassar esta dificuldade, como a construção de uma relação de proximidade e confiança com os participantes e a utilização progressiva das gravações para que sejam encaradas como naturais.

Apenas nas primeiras aulas e na primeira entrevista se registou alguma agitação por parte dos alunos, traduzida nas constantes referências às gravações. Nestas sessões, apesar das reacções iniciais, com o desenvolvimento do trabalho pareciam esquecer-se das câmaras e dos gravadores, discutindo naturalmente entre si, com a investigadora e com o professor. Ao longo do estudo este comportamento foi normalizando e os alunos conseguiram abstrair-se da presença do material de registo.

Os momentos de introdução e de exploração das tarefas em grande grupo foram registados em vídeo e complementados pela gravação áudio da discussão promovida entre os alunos-caso. O visionamento e a transcrição destas gravações permitiram completar os relatórios de observação com situações pertinentes que, ao longo da sessão, não foram perceptíveis. As entrevistas efectuadas a cada um dos pares seleccionados foram gravadas em áudio para posterior transcrição e análise.

Documentos. A relevância da recolha de documentos, prévios ao estudo ou elaborados no decorrer do mesmo, é também mencionada por diversos autores. Ao contrário das observações e das entrevistas, o recurso a documentos é considerado um método não intrusivo e a sua utilização é frequentemente referida como fundamental na confirmação de evidências recolhidas por outros métodos (Yin, 1989).

Neste trabalho foram recolhidos e analisados documentos de natureza diversa, alguns produzidos pelos alunos, no âmbito do estudo, outros mais formais, cedidos pelas escolas e ainda documentos elaborados pela investigadora.

Logo no início do ano lectivo os alunos responderam a um inquérito que tinha como objectivo aceder a algumas informações de índole pessoal e simultaneamente de natureza académica, incidindo sobre opiniões e preferências (Anexo L). Este documento contribuiu para uma melhor caracterização das turmas e, em particular, dos alunos-caso.

Após a exploração de cada uma das tarefas propostas ao longo da experiência de ensino, procedeu-se à recolha das respectivas folhas de resolução. Estes documentos foram essenciais na identificação de alguns processos cognitivos dos participantes, permitindo analisar o tipo de estratégias, detectar algumas dificuldades e perceber qual o papel da visualização no seu desempenho. Igualmente importante para a recolha de dados foi a realização do pré-teste e do pós-teste. Estas duas implementações do teste permitiram reunir dados referentes ao desempenho dos alunos em situações de generalização de padrões. Devido à relevância das tarefas e do teste, como instrumentos de recolha de dados neste estudo, optou-se por fazer uma descrição detalhada, em secções diferenciadas, de alguns aspectos relacionados com o conteúdo, a validação e a pilotagem dos mesmos.

Foram ainda gentilmente cedidos pelas Escolas registos relacionados com o percurso escolar dos alunos bem como as fichas biográficas preenchidas no início do ano lectivo. Estes documentos permitiram aceder a informação acerca: das habilitações e profissões dos pais, idade dos alunos, número de irmãos e aproveitamento escolar. Estes dados contribuíram de forma significativa para a caracterização das turmas e dos alunos-caso.

Destacam-se ainda os registos escritos elaborados pela investigadora ao longo do estudo, nomeadamente os relatórios de observação de aulas e notas de carácter pessoal. Nos relatórios das sessões observadas procurou-se elaborar uma descrição fiel do contexto, focando reacções dos alunos, dificuldades detectadas, comentários, questões colocadas, atitudes, tempo gasto na resolução das tarefas e outros episódios relevantes. Além destes registos, a investigadora procedeu ainda à organização de notas pessoais resultantes de outras situações e actividades nas quais manteve contacto com os alunos, incluindo-se neste leque notas relativas à observação de alguns situações marcantes que surgiram nas entrevistas e notas associadas a conversas casuais mantidas com os alunos.

Tabela 4 -Descrição resumida dos métodos de recolha de dados aplicados no estudo

Método de recolha de dados	Descrição
Observação	A investigadora assumiu o papel de observadora participante. Organizou-se um registo de observação com base nas anotações efectuadas durante e imediatamente após a aula observada. Estes registos eram ainda complementados com a observação das gravações de cada sessão.
Entrevistas	Realizaram-se sete entrevistas semi-estruturadas aos pares seleccionados, após a realização de cada uma das tarefas.
Gravações áudio e vídeo	Procedeu-se à gravação áudio e vídeo das sessões de exploração e discussão das tarefas e à gravação áudio das entrevistas realizadas aos alunos-caso. Estes registos foram transcritos integralmente.
Documentos	Recolheram-se vários tipos de documentos: relatórios de observação; folhas de resolução das tarefas; folhas de resolução relativas ao pré-teste e ao pós-teste; inquéritos; registos biográficos; registos relativos ao percurso escolar.

6.2.4. A escolha das tarefas

No ano lectivo anterior ao estudo, procedeu-se à elaboração de uma série de nove tarefas centradas na identificação e generalização de padrões. Foi dada preferência a tarefas utilizadas em outras investigações e em documentos curriculares, uma vez que já tinham sido alvo de validação, no entanto algumas das questões foram adaptadas tendo em vista a sua adequação aos objectivos do estudo. Efectuou-se a pilotagem destas tarefas com quatro alunos de uma escola de Viana do Castelo, dois do 5.º ano e dois do 6.º ano de escolaridade. Cada um dos alunos participou em quatro entrevistas ao longo das quais foram exploradas as nove tarefas. Este procedimento conduziu a adaptações de conteúdo relativas: à linguagem utilizada; ao número de questões efectuadas; à adequação dos enunciados à faixa etária; e ao tempo previsto para a sua exploração.

Para este estudo foram escolhidas sete das tarefas inicialmente estruturadas. Esta selecção foi condicionada por três factores: o potencial do problema, no sentido de possibilitar a aplicação de múltiplas estratégias de resolução; a exploração da generalização de padrões de vários tipos, desde padrões lineares a padrões não lineares; e o estabelecimento de um contexto privilegiado para a abordagem de vários tópicos matemáticos que atravessam os currículos do 5.º e do 6.º anos de escolaridade.

Na concepção das tarefas considerou-se fundamental incluir questões que potenciassem a generalização. O principal objectivo incidia na identificação de regras que permitissem caracterizar os padrões evidenciados nas situações problemáticas. Deste modo, a estrutura das tarefas é semelhante no que respeita à formulação das questões cuja incidência recai sobre a generalização próxima e a generalização distante. Em alguns casos procura-se ainda promover a reversibilidade do pensamento, através da proposta de cálculo do valor da variável independente, sendo conhecido o respectivo valor da variável dependente.

A maioria das tarefas seleccionadas para este estudo é acompanhada da representação visual de um ou mais termos da sequência. A literatura refere que a utilização de um suporte visual na apresentação de problemas que envolvem a procura de padrões pode conduzir à aplicação de diferentes abordagens para chegar à generalização (Kenney, Zawojewski & Silver, 1998; Stacey, 1989; Steele, 2008; Swafford & Langrall, 2000), permitindo a aplicação de estratégias de natureza visual e não visual. De facto, os alunos podem facilmente passar do contexto visual para o numérico, estabelecendo a ligação entre as duas formas de representação, o que poderá contribuir para o reconhecimento do significado dos valores utilizados e para a descodificação das variáveis envolvidas. Por outro lado, os modelos visuais podem actuar como um elemento catalisador na identificação da estrutura do padrão que está subjacente nas figuras, promovendo assim uma abordagem funcional (Lannin, 2005). Nas tarefas que não contemplam representações visuais explícitas, possibilita-se o recurso a material concreto, para que os alunos criem os seus próprios modelos dos fenómenos.

Foram ainda privilegiadas nestas tarefas situações problemáticas contextualizadas, conhecidas por potenciarem o recurso a experiências prévias e um raciocínio mais flexível, através da utilização de estratégias criativas e não rotineiras. Este tipo de problemas facilita ainda a reflexão acerca das representações matemáticas utilizadas e contribui para a compreensão dos tópicos matemáticos envolvidos (Kaput, 1999).

No Capítulo 7 é feita uma análise detalhada de cada uma das sete tarefas, através da discussão de algumas particularidades e possíveis abordagens de resolução.

6.2.5. Teste de avaliação de desempenho

Procedeu-se à construção de um teste (Anexo A) com a finalidade de avaliar o desempenho dos alunos em tarefas de exploração e generalização de padrões. Este teste é constituído por questões de natureza pré-algébrica, nomeadamente um conjunto de sequências de estrutura visual e não visual que devem ser continuadas por mais dois termos, seguidas de dois problemas de generalização próxima e distante, apresentados em contexto visual.

Os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) destacam que as ideias algébricas devem emergir de situações como: identificar ou construir padrões numéricos e geométricos; descrever padrões verbalmente e representá-los em tabelas ou com símbolos; procurar e aplicar relações entre quantidades variáveis para efectuar previsões; fazer e argumentar generalizações que parecem funcionar em casos particulares. De forma geral, as abordagens ao ensino e aprendizagem da álgebra são bastante diversificadas, por exemplo Bednarz, Kieran e Lee (1996) consideram que um ensino significativo da álgebra deve contemplar quatro perspectivas fundamentais: (1) a generalização de padrões e a procura de regras e conexões entre fenómenos numéricos; (2) a resolução sistemática de problemas; (3) a modelação de fenómenos físicos; e (4) o desenvolvimento dos conceitos de variável e de função. Atendendo aos objectivos do estudo e ao nível de ensino dos alunos nele envolvidos optou-se por valorizar neste teste a identificação de padrões de natureza diversa, em situações de generalização próxima e distante, tanto por intermédio da continuação de sequências como da resolução de problemas.

O teste foi submetido a uma revisão efectuada por uma equipa constituída por dois professores do 1.º Ciclo, três professores de Matemática e Ciências da Natureza e cinco professores de Matemática do Ensino Superior. Este painel analisou parâmetros como: a pertinência do conteúdo para os objectivos da avaliação; a adequação da linguagem e das propostas ao nível de ensino; e o tempo de resolução estipulado. Nesta fase procedeu-se a ajustes no teste tendo em consideração as sugestões apresentadas pelo painel consultado.

A pilotagem do teste foi efectuada com uma amostra de 90 alunos, de uma escola do distrito de Viana do Castelo, 42 de duas turmas de 5.º ano de escolaridade e 48 de duas turmas de 6.º ano de escolaridade.

Procedeu-se à avaliação das respostas através de uma escala de avaliação holística focada (Charles, Lester e O'Daffer, 1987) adaptada ao conteúdo deste teste (Anexo B). Em cada questão a pontuação varia entre 0 e 4 pontos, dependendo do nível de desempenho dos alunos.

A fiabilidade do teste foi medida através do Alpha de Cronbach. Este procedimento é, em geral, o mais adequado para estimar a consistência interna dos itens de um instrumento de avaliação, quando não se trata da obtenção de resposta certa ou errada (McMillan & Schumacher, 2001). A escala para o coeficiente de fiabilidade varia entre 0,00 e 0,99. Neste caso o valor obtido foi 0,845 o que representa um bom indicador de fiabilidade, tendo em conta que 0,70 é um nível aceitável (Fraenkel e Wallen, 1990). O tratamento estatístico que conduziu à obtenção deste valor foi efectuado com o programa *SPSS* para *Windows,* versão 13.0.

O teste foi aplicado no início do ano lectivo, em Setembro de 2006, antes de ter início a experiência de ensino. Nesta fase participaram as duas turmas experimentais e a turma que funcionou como grupo de controlo. Após a experiência de ensino, em Junho de 2007, voltou a ser implementado o teste, às três turmas, com o objectivo de analisar o impacto da experiência no desempenho dos alunos, ao nível da resolução de problemas com padrões.

6.2.6. Fases do estudo e Procedimentos

O estudo decorreu entre Setembro de 2005 e Junho de 2009, tendo nele participado alunos do 6.º ano de escolaridade. É possível diferenciar neste estudo três fases fundamentais, cuja calendarização se encontra sintetizada na Tabela 5.

Tabela 5 – Calendarização do estudo

Datas	Fases do Estudo	Procedimentos
Setembro de 2005 a Junho de 2006	Preparação do estudo	Definição dos objectivos fundamentais; Recolha bibliográfica; Construção dos materiais e instrumentos;
		Pilotagem dos materiais e instrumentos;
	Acesso às Escolas e às turmas	Pedido de autorização aos orgãos de gestão das Escolas envolvidas no estudo; Primeiro contacto com as turmas e apresentação do estudo aos alunos; Pedido de autorização aos Encarregados de Educação;
	Escolha das tarefas	Selecção das tarefas e discussão da ordem de aplicação;
Setembro de 2006 a Junho de 2007	Primeira avaliação de desempenho	Aplicação do pré-teste;
	Início da experiência de ensino	Aplicação da primeira tarefa e gravação da sessão; Visualização da gravação e análise dos relatórios escritos;
	Escolha dos casos	Selecção de dois pares em cada turma para desenvolver estudos de caso;
	Continuação da experiência de ensino	Realização da 1ª entrevista aos pares seleccionados; Aplicação das tarefas e gravação das sessões; Visualização das gravações e análise dos relatórios escritos; Realização das entrevistas aos pares seleccionados;
	Estudo do impacto da experiência de ensino	Aplicação do pós-teste; Comparação dos resultados obtidos no pré-teste e no pós-teste;
Setembro de 2007 a Junho de 2009	Redacção da tese	Continuação da análise de dados; Redacção do relatório escrito correspondente ao trabalho realizado; Revisão final de literatura;

A primeira fase decorreu entre Setembro de 2005 e Junho de 2006 e tinha associados três grandes objectivos: preparar o estudo; aceder às Escolas e às turmas; e seleccionar materiais. Depois de delineado o projecto de tese, procedeu-se ao levantamento de bibliografia relacionada com a temática específica do estudo bem como sobre metodologias de investigação. Seguiu-se a concepção dos materiais e instrumentos a utilizar na recolha de dados. Alguns destes materiais, como o teste e as tarefas, passaram por uma fase de pilotagem para averiguar a sua validade, a adequação à faixa etária dos alunos e aos objectivos do estudo. Neste período foi também formalizado o acesso às escolas e às turmas participantes no estudo, através da concessão das respectivas autorizações. Antes de se passar à fase seguinte as tarefas foram analisadas juntamente com os professores de cada uma das turmas de forma a discutir a sua adequação e a ordem de implementação mais adequada.

O período entre Setembro de 2006 e Junho de 2007 correspondeu ao trabalho de campo. No início do ano lectivo 2006/2007 foi implementado, em cada turma, o pré-teste como forma de avaliar o desempenho individual dos alunos na resolução de tarefas associadas à exploração de padrões. Posteriormente, e até ao final de Junho de 2007, os alunos passaram a trabalhar em díades resolvendo tarefas no âmbito da generalização próxima e distante. Estas sessões foram videogravadas para posterior visualização e análise, em conjunto com as folhas de resolução. A escolha dos estudos de caso foi efectuada após a exploração da primeira tarefa. Nesse momento havia já algum contacto com o contexto e com os alunos bem como dados emergentes da aplicação do pré-teste e da primeira tarefa, permitindo assim a selecção criteriosa dos pares a estudar de forma mais aprofundada. Após a exploração de cada uma das tarefas foi realizada uma entrevista semi-estruturada aos pares seleccionados. Em Junho de 2007, os alunos foram submetidos ao pós-teste com o objectivo de se proceder à avaliação do impacto da experiência de ensino no seu desempenho individual.

A última fase do estudo correspondeu à conclusão da análise dos dados que se revelou bastante morosa devido à complexidade da informação recolhida, bem como à necessidade de se efectuar uma análise detalhada da mesma. Simultaneamente procedeu-se à redacção da tese e à leitura de algumas referências bibliográficas consideradas pertinentes para a revisão dos capítulos já redigidos.

6.2.7. Análise dos dados

Em qualquer investigação, a análise dos dados caracteriza-se pela redução e organização da informação recolhida, com o propósito de encontrar resultados que possam ser interpretados pelo investigador e comunicados de forma clara e organizada (Creswell, 2003). É pertinente salientar que as fases de recolha e análise dos dados são muitas vezes praticamente indissociáveis. Por norma, à medida que os dados vão sendo recolhidos, o processo de análise vai ocorrendo paralelamente (Tashakkori & Teddlie, 2003), podendo daí resultar novos caminhos para a recolha de dados ou propostas alternativas para as questões de investigação.

Ao longo deste estudo, foram utilizados diversos métodos de recolha de dados o que conduziu a um volume de informação considerável. Os testes implementados antes e após a experiência de ensino, os relatórios de observação das aulas, o visionamento dos registos em vídeo realizados nas aulas, os relatórios das tarefas elaborados pelos alunos, as transcrições das entrevistas gravadas em áudio e os documentos cedidos pelas escolas, constituíram as principais fontes de informação utilizadas pela investigadora. Após repetidas leituras e consultas, procedeu-se à codificação e classificação dos dados de forma a sistematizar e comprimir a informação para facilitar a interpretação dos resultados (Denzin & Lincoln, 2000). Esta constante procura de padrões, temas ou categorias requer alguma perspicácia do investigador na identificação do que é realmente significativo nos dados. Nesta perspectiva considera-se que a fase de análise é um processo de descoberta, ao longo do qual são desenvolvidos tópicos codificados e categorias, que podem surgir dos dados ou estar pré-determinados, e se procura padrões para formular explicações plausíveis. Alguns investigadores iniciam a análise recorrendo a categorias pré-determinadas que podem surgir das seguintes fontes: questões de investigação; instrumentos de investigação, por exemplo o guião de uma entrevista; experiência pessoal prévia que se torna relevante no trabalho de campo; e categorias encontradas na literatura (Stake, 1994; McMillan & Schumacher, 2001).

Apesar de neste estudo se ter adoptado uma metodologia mista, privilegiou-se a componente qualitativa, através da utilização de um *design* de estudo de caso. A abordagem quantitativa, cujo principal instrumento de recolha de dados foi o teste, ocupou um lugar de menor destaque, tendo sido integrada na investigação com o objectivo de clarificar o fenómeno em estudo, permitindo dar resposta a uma questão de natureza diferente. Sendo um estudo predominantemente qualitativo, considerou-se que as fases de recolha e análise de dados estavam intimamente ligadas, tendo-se adoptado um modelo de análise interactivo, como é proposto por Miles e Huberman (1994). O modelo referido defende que as regularidades e explicações encontradas ao longo da análise de dados podem ser confirmadas ou refutadas à medida que outros dados são recolhidos e analisados. Estes autores propõem que a análise seja dividida em três componentes: (1) *redução dos dados*; (2) *apresentação dos dados*; e (3) *conclusões e verificação*. A *redução* *dos dados* é definida como o processo de seleccionar, focar, simplificar, abstrair e transformar os dados compilados, de modo a permitir a formulação de conclusões. Referem que os dados podem ser reduzidos e transformados através de processos como: a selecção; a síntese em parágrafos, frases ou números; ou ainda a integração em classes. Este é um processo contínuo que ocorre ao longo da recolha de dados, prolongando-se após o trabalho de campo até à determinação das conclusões finais. A *apresentação dos dados* é a segunda maior actividade na fase de análise. O objectivo fundamental é a disposição e apresentação dos dados, previamente reduzidos, de forma organizada e condensada para facilitar a chegada às conclusões. Miles e Huberman explicam que “o ser humano não é um processador poderoso para grandes quantidades de informação” (1994, p. 11) e que textos muito extensos podem influenciar negativamente a sua capacidade de interpretação. A utilização de formas adequadas de sintetizar e apresentar a informação pode contribuir para que o investigador seja capaz de mais facilmente interpretar os fenómenos em estudo e decidir os passos que se seguem na análise. A chegada às *conclusões e* a sua *verificação* constitui a fase final da actividade de análise. É neste momento que o investigador começa a decidir o significado das coisas. Este processo envolve a procura de regularidades, tentando identificar diferenças ou semelhanças, explicações, possíveis configurações, fluxos causais e proposições. No entanto, Miles e Huberman (1994) sugerem que o investigador deve encarar esta fase da análise com algum grau de abertura e cepticismo. As conclusões devem ser fundamentadas e refinadas ao longo do processo de análise dos dados.

Como já foi referido, a análise de dados seguiu o modelo proposto por Miles e Huberman (1994). À medida que os dados foram sendo recolhidos, procedeu-se à sua codificação e classificação, de modo a sistematizar e organizar a informação para posterior interpretação. As categorias foram pré-determinadas antes da análise, para facilitar a exploração e descrição dos casos, e formadas com base nas questões que orientam o estudo e no referencial teórico. A partir das questões do estudo surgiram três temas gerais que iriam orientar o foco inicial da análise: *estratégias de generalização*; *dificuldades na exploração de padrões*; e *papel da visualização no desempenho dos alunos*. A revisão de literatura tornou possível a formação de categorias associadas a estas temáticas, antes de se iniciar o processo de análise dos dados. No entanto, a interactividade entre as fases de recolha e análise dos dados conduziu à emergência de categorias que não tinham sido consideradas previamente e ao refinamento de outras. A descrição das categorias de análise e respectivas subcategorias foi registada por escrito em tabelas (Anexo J) que orientaram a leitura e organização dos dados ao longo do processo analítico. Os domínios considerados nesta categorização foram: *estratégias de generalização*; *natureza das estratégias de generalização*; *tipo de generalização*; *natureza da generalização*; *nível de generalização*; *estrutura das figuras*; e *características dos valores atribuídos às variáveis*. Em alguns casos, optou-se por recorrer a códigos de modo a facilitar a apresentação e interpretação da informação, tornando mais óbvias as relações entre os dados.

A primeira fase de análise dos dados foi concretizada após a implementação do pré-teste, em Setembro de 2006. Os testes foram avaliados com base na escala construída e os resultados, relativos a cada um dos alunos das três turmas, foram submetidos e tratados no programa *SPSS* para *Windows*, versão 13.0. Após a redução dos dados, procedeu-se a uma análise estatística que contemplou a construção de tabelas com as médias das classificações por questão, bem como os valores máximos e mínimos atingidos, nas turmas experimentais. Esta primeira abordagem deu lugar a um conjunto de dados de natureza quantitativa, baseados em indicadores de desempenho, relacionados com a resolução de problemas com padrões. No entanto permitiu ainda uma análise das temáticas principais do estudo e da sua relação com o tipo de tarefas propostas no teste. Através deste conjunto de dados, foi possível codificar e classificar as estratégias utilizadas pelos alunos, identificar algumas dificuldades, tentando também, dentro do possível perceber a influência da visualização no seu desempenho. A informação recolhida nestes testes deu lugar a um primeiro refinamento das categorias associadas às estratégias de generalização que tinham surgido da revisão da literatura.

Ao longo da experiência de ensino, destaca-se outro nível de análise de dados que precedeu a realização das entrevistas aos estudos de caso. Num momento prévio, foram analisados os relatórios de observação das sessões de exploração das tarefas e as folhas de resolução desses alunos, tendo como fio condutor os objectivos do estudo e a necessidade de compreender o modo como os alunos estruturaram o seu raciocínio. Com base nesta análise procedeu-se à construção de um guião com questões orientadoras para cada entrevista.

Na fase de exploração das tarefas propostas no estudo, analisou-se o relatório de observação da aula, a folha de resolução dos alunos, com especial enfoque nos estudos de caso, e a transcrição das respectivas entrevistas. Dado o volume de informação e o seu carácter descritivo, houve necessidade de a reduzir a um formato possível de trabalhar, construindo tabelas com base nas categorias de análise, particularmente relacionadas com o tipo de estratégias de generalização utilizadas e a sua associação à generalização próxima e distante. No entanto, sempre que se revelou pertinente, foi feita a sistematização de outros dados, tendo sempre em perspectiva as questões de investigação. A utilização das tabelas possibilitou o estabelecimento de um friso cronológico que permitiu analisar mais facilmente a evolução dos alunos-caso e das turmas, ao longo da resolução das tarefas.

A recolha de dados terminou com a segunda implementação do teste, em Junho de 2007. O pós-teste foi avaliado de acordo com a escala que se construiu e os resultados relativos às três turmas foram tratados estatisticamente no programa *SPSS* para *Windows*, versão 13.0, à semelhança do que já tinha sucedido com o pré-teste, no início do estudo. Optou-se por uma análise estatística comparativa, estabelecendo um paralelismo entre os resultados do pré-teste e do pós-teste. Para isso, começou-se por determinar as médias das classificações por questão, o que permitiu ter acesso a dados de natureza quantitativa que contribuíram para a análise da evolução dos alunos das turmas experimentais, do pré-teste para o pós-teste. Esta análise de carácter quantitativo foi conjugada com a análise de dados qualitativos, referentes aos temas delineados nas questões de investigação, em cada uma das tarefas do teste, focando alterações ao nível das estratégias de generalização utilizadas, dificuldades sentidas e influência da visualização. De forma a avaliar a existência de diferenças significativas nos resultados dos alunos, após a exploração das tarefas, procedeu-se a uma análise estatística, em cada uma das turmas. Inicialmente, fez-se um estudo exploratório, nas turmas experimentais, observando os diagramas de extremos e quartis, associados aos resultados do pré-teste e do pós-teste. Esta forma de representação gráfica permitiu analisar a distribuição dos dados, em cada caso, e identificar a existência de possíveis *outliers* (observações aberrantes). Após se ter confirmado a existência de diferenças no desempenho dos alunos, do pré-teste para o pós-teste, era pertinente avaliar se essas diferenças eram estatisticamente significativas. Nesta fase, cada uma das turmas experimentais foi comparada com o grupo de controlo, tendo para isso sido usada a análise de covariância (ANCOVA). Este método estatístico é utilizado para determinar a relação entre uma variável independente, representativa de uma categoria (factor), e uma variável dependente quantitativa, controlando uma ou mais variáveis quantitativas externas

(Pedhazur & Schmelkin, 1991). Neste estudo, considerou-se relevante o recurso à ANCOVA para estabelecer uma comparação entre os resultados do pós-teste, de cada turma experimental com o grupo de controlo, para desta forma serem ajustadas potenciais diferenças que pudessem existir nos resultados do pré-teste. Este procedimento permitiu assim analisar o efeito do factor grupo na variável dependente, pós-teste, controlando os efeitos da variável pré-teste (covariante). Antes de executar a ANCOVA, usando o *SPSS*, foi necessário verificar o cumprimento dos pressupostos para a sua aplicação, nomeadamente: a normalidade das distribuições; a homogeneidade das variâncias; a existência de uma relação linear entre a covariante (pré-teste) e a variável dependente (pós-teste); a homogeneidade das rectas de regressão; e a fiabilidade da medição da covariante.

6.2.8. Critérios de qualidade

É fundamental que todo o investigador em educação se preocupe com questões relacionadas com a qualidade da investigação efectuada e com o rigor dos métodos e procedimentos a que recorre, sejam eles de cariz quantitativo ou qualitativo. A validade de um estudo está associada ao grau de fidelidade da fundamentação científica dos fenómenos em relação à realidade observada (McMillan & Schumacher, 2001). Alguns autores realçam a necessidade de contemplar critérios específicos que assegurem a qualidade de um estudo, nomeadamente: a *autenticidade*, a *aplicabilidade*, a *consistência* e a *neutralidade* (Denzin & Lincoln, 2000; Erlandson, Harris, Skipper & Allen, 1993; Miles & Huberman, 1994). Dado que as investigações de natureza qualitativa e quantitativa têm características e propósitos distintos, os respectivos critérios de qualidade devem reflectir essas diferenças. Neste sentido, são utilizadas diferentes terminologias, associadas aos critérios previamente referidos, na demonstração da validade de uma investigação qualitativa e de uma investigação quantitativa, respectivamente: *credibilidade*/*validade interna*; *transferabilidade*/*validade externa*; *fidedignidade*/*fiabilidade*; e *confirmabilidade*/*objectividade*. Uma vez que este estudo tinha uma forte componente qualitativa foi dada particular atenção à garantia dos critérios de qualidade para este tipo de investigação. Relativamente aos critérios de qualidade associados à componente quantitativa deste estudo, atendeu-se principalmente à validade interna e validade externa.

A credibilidade relaciona-se com o grau de confiança na veracidade e autenticidade dos resultados, ou seja, se as interpretações do investigador correspondem à perspectiva dos participantes. Alguns autores (e.g. Erlandson *et al.*, 1993; Merriam, 1988) sugerem a aplicação de estratégias como a triangulação e o envolvimento prolongado no contexto para garantir a credibilidade do estudo. Para além destas estratégias, Lincoln e Guba (2000) referem ainda a observação persistente. Destaca-se que, neste trabalho, foram utilizados métodos diversificados de recolha de dados que deram lugar à comparação e integração de informação de natureza diferente. Este procedimento assegurou uma compreensão mais profunda do fenómeno em estudo, através da combinação dos pontos fortes de cada uma das fontes de dados. A componente quantitativa associada a este estudo centrava-se na avaliação do impacto da exploração de tarefas com padrões visuais no desempenho dos alunos ao nível da generalização, tendo-se para isso recorrido a um pré-teste e a um pós-teste. De forma a reduzir as ameaças à validade interna do estudo, foram utilizadas diferentes estratégias. Antes de iniciar o estudo, foram efectuadas a pilotagem e a medição da fiabilidade do teste aplicado, tendo-se ainda recorrido a um grupo de controlo que foi submetido ao pré-teste e ao pós-teste, nos mesmos momentos que as turmas experimentais, e, por fim, foi aplicada a ANCOVA que controla possíveis diferenças iniciais entre grupos. No que refere à vertente qualitativa e, em particular, ao grau de envolvimento no contexto em estudo, salienta-se que a investigadora acompanhou as turmas participantes, ao longo de um ano lectivo, tendo observado a maioria das aulas de Matemática desses alunos, no papel de observadora participante. Esta estratégia permitiu desenvolver um conhecimento detalhado das características do contexto e dos participantes e simultaneamente diminuir constrangimentos causados pela presença da investigadora.

A transferabilidade refere-se à possibilidade de aplicação dos resultados a outros contextos, ou seja, até que ponto os resultados obtidos podem ser legitimamente comparados com outros casos. Esta vertente da generalização, tipicamente associada à investigação quantitativa, é apontada como uma limitação da investigação qualitativa. No entanto, determinados autores defendem que a generalização deve ser entendida de forma distinta nos estudos quantitativos, onde o objectivo passa por alargar os resultados observados numa amostra para uma população, e nos estudos qualitativos, onde a preocupação do investigador deve ser a apresentação e descrição detalhada dos resultados e dos pressupostos fundamentais da investigação, para que outros possam analisar a possibilidade de transferência para outros contextos ou situações (Lincoln & Guba, 2000; Yin, 1989). No caso deste estudo, tratando-se de uma investigação de natureza mista, foi contemplada uma componente quantitativa, no entanto, atendendo às características da investigação, que privilegiou claramente uma abordagem qualitativa, não era pretensão da investigadora generalizar os resultados obtidos a outros contextos ou sujeitos. Neste sentido, no que refere à vertente qualitativa, a transferabilidade pode ser facilitada através: de descrições detalhadas que permitam aceder, na medida do possível, a todos os pormenores do estudo; da elaboração de um diário reflexivo, no qual o investigador regista regularmente informação sobre si próprio, a sistematização e organização do trabalho, as suas perspectivas e razões para as decisões tomadas; e de uma amostragem intencional, procurando seleccionar sujeitos que permitam maximizar a descoberta de detalhes ricos e relevantes acerca do assunto em estudo (Lincoln & Guba, 2000; Yin, 1989). Tendo por base as técnicas referidas, neste trabalho foi feita a caracterização dos participantes e do contexto, bem como uma descrição pormenorizada dos dados, de forma a clarificar a construção dos resultados, tendo sempre como base teórica as questões que orientadoras do estudo. Acrescenta-se ainda que houve um recurso sistemático e regular à elaboração de notas e que os alunos estudados foram seleccionados tendo por base critérios bem definidos que conduzissem à maximização e identificação daquilo que era relevante na investigação.

A fidedignidade relaciona-se com o princípio da replicação, isto é, o investigador deve verificar se o processo do estudo é consistente, produzindo os mesmos resultados no caso de ser repetido, eventualmente por outro investigador. Na investigação qualitativa este tipo de replicabilidade é impossível de conseguir, fruto da flexibilidade que a caracteriza e da constante interacção entre investigador e participantes, que levam a que os resultados não se repitam. No entanto há autores que defendem que mais do que saber se outros investigadores obtêm os mesmos resultados, pretende-se descobrir se estão de acordo com os resultados obtidos e se estes fazem sentido (Lincoln & Guba, 2000). Para que este critério seja cumprido Merriam (1988) propõe, por um lado, que o investigador clarifique o seu posicionamento no contexto, o que envolve a descrição do grau de envolvimento no campo e com o grupo que estuda, a sistematização dos critérios de selecção dos participantes, bem como a sua descrição, e ainda a explicitação detalhada dos métodos e procedimentos utilizados na recolha de dados. Como já foi referido, todos estes aspectos foram tidos em consideração pela investigadora. Merriam (1988) menciona ainda a construção de uma pista de auditoria para que outros investigadores ou leitores possam compreender os percursos e procedimentos pelos quais se optou ao longo do estudo, permitindo assim a reconstrução do caminho que conduziu aos resultados. Nesta investigação explicou-se claramente a forma como os dados foram recolhidos, o tipo de documentos que serviram de base à análise, as categorias de análise que derivaram das questões de investigação e do enquadramento teórico, bem como as decisões que foram sendo tomadas ao longo do estudo.

Por seu lado, a confirmabilidade implica que o investigador garanta que os resultados dependem apenas dos participantes e das condições do estudo, sem que haja interferência da sua parte na validade das conclusões. Tratando-se de uma investigação predominantemente qualitativa, a principal preocupação do investigador é garantir que os dados se confirmem mutuamente e não tanto assegurar que as suas ideias influenciem as conclusões (Erlandson *et al.*, 1993). A triangulação dos dados e a explicitação clara e consciente do fio condutor do estudo permitem, segundo Miles e Huberman (1994), ultrapassar possíveis constrangimentos. O segundo critério implica que o investigador tenha noção do impacto que as suas suposições, valores e estados afectivos podem ter no estudo, considerando, sempre que necessário, a plausibilidade de outras conclusões. Neste aspecto, a descrição feita na análise de dados dá uma ideia clara de como todo o estudo se desenrolou e a discussão dos resultados, bem como as recomendações sugeridas no final deste trabalho, permitem avaliar o significado que a investigação teve para a investigadora.

CAPÍTULO 7

AS TAREFAS

Neste capítulo procede-se a uma caracterização detalhada das tarefas propostas na experiência de ensino. Para cada uma das tarefas é feita referência a aspectos específicos e são apresentadas algumas propostas de resolução, baseadas na aplicação das estratégias de generalização destacadas no enquadramento teórico.

7.1. Caracterização e exploração das tarefas

As tarefas foram maioritariamente propostas nas aulas de Matemática, tendo sido decidido com os professores de cada turma qual a ordem de implementação. O critério que ditou esta sequência relacionou-se com os tópicos matemáticos subjacentes a cada tarefa, para que os alunos tivessem os pré-requisitos necessários à sua resolução.

Sem excepção, todas as tarefas contemplam o estudo de padrões, variando apenas a estrutura matemática dos mesmos. Os problemas propostos envolvem padrões de tipo linear e não linear, nomeadamente, quadráticos, cúbicos e exponenciais. Destaca-se, no entanto, que apresentam algumas características que as distinguem, como os tópicos matemáticos e os objectivos específicos que promovem.

De seguida, é feita uma descrição detalhada das características de cada uma das tarefas trabalhadas ao longo da experiência de ensino, sendo ainda apresentadas algumas propostas de resolução, com base nas estratégias de generalização contempladas no enquadramento teórico: contagem, termo unidade, diferença, explícita e tentativa e erro. Em determinados casos, por desadequação das estratégias, não se faz referência à sua utilização.

7.1.1. Tarefa 1 – Os lembretes da Joana

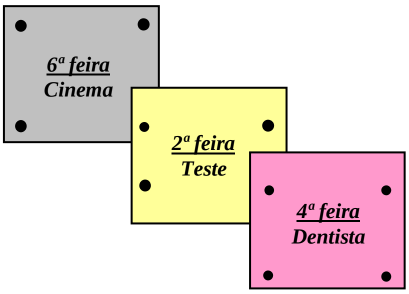
A tarefa *Os lembretes da Joana* (Figura 7) tem subjacente um padrão linear crescente. Trata-se de um problema contextualizado, acompanhado da representação visual do terceiro termo da sequência. No entanto, apesar de a tarefa ter uma forte componente visual, os alunos podem optar por abordagens diversificadas, já que a explicitação do raciocínio pode ser apresentada por intermédio de cálculos, palavras ou desenhos. No que respeita aos tópicos matemáticos envolvidos, as questões colocadas mobilizam essencialmente o reconhecimento de propriedades associadas a polígonos, como o rectângulo e o triângulo, e a manipulação de expressões numéricas.

Nas três primeiras questões da tarefa pretende-se que os alunos identifiquem e utilizem a relação existente entre o número de lembretes rectangulares e o número de *pioneses* utilizados. Na última questão procede-se à alteração da configuração dos lembretes mantendo-se, no entanto, a estrutura do questionamento utilizado anteriormente. Os lembretes passam de rectangulares a triangulares, afectando deste modo a distribuição dos *pioneses*. Esta modificação da forma dos lembretes, e consequentemente da disposição dos *pioneses*, dá lugar à obtenção de expressões diferentes das exploradas nas questões anteriores, mas o tipo de estratégias a aplicar é análogo ao que foi utilizado nos lembretes rectangulares.

Os lembretes da Joana

Em cada alínea deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Para não se esquecer dos seus compromissos a Joana pendura lembretes no placar do quarto, colocando *pioneses* como mostra a figura.



Se a Joana continuar a pendurar os seus lembretes desta forma:

1. De quantos *pioneses* precisará para colocar no seu placar 6 lembretes?
2. E se quiser pendurar 35 lembretes, de quantos *pioneses* precisará?
3. Sabendo que a Joana comprou uma caixa com 600 *pioneses*, quantos lembretes poderá pendurar, no máximo, no seu placar?
4. A Joana decidiu utilizar cartões triangulares para registar os seus compromissos. Sabendo que em cada vértice de um triângulo utiliza um *pionés* e que dois triângulos consecutivos têm um *pionés* em comum, estuda as alíneas anteriores para este caso.

Adaptada de Lannin (2005)

Figura 7 - Enunciado da tarefa *Os lembretes da Joana*

Desta forma, apenas se apresentará uma breve exploração das três primeiras questões da tarefa, focando estratégias de generalização que poderão ser suscitadas em cada caso.

Contagem. A utilização de uma representação visual dos lembretes e dos *pioneses*, e a contagem dos elementos solicitados, constitui uma estratégia eficaz quando estamos perante uma generalização próxima. A generalização para um termo mais distante torna este processo exaustivo e passível de erros, nomeadamente erros de contagem ou relacionados com a representação efectuada.

Sendo assim, a descoberta do 6.º termo da sequência (questão *1*), nomeadamente do número de *pioneses* que são gastos ao pendurar seis lembretes, pode ser efectuada através desta abordagem. Os alunos poderão desenhar os seis lembretes e os respectivos *pioneses* e proceder à contagem destes últimos.

Termo unidade. O padrão evidenciado nesta tarefa tem uma estrutura linear, tornando desadequada a utilização da proporcionalidade directa. No entanto, a estratégia termo unidade é aplicável se for feito um ajuste com base no contexto do problema. Ao utilizar múltiplos de termos conhecidos da sequência, há uma contagem repetida de alguns dos elementos, o que implica o ajuste do resultado através da subtracção dos elementos sobrepostos. A abordagem descrita refere-se a uma generalização de natureza desconstrutiva que se situa num nível de abstracção superior ao da generalização construtiva, na qual a descoberta do padrão tem por base a subdivisão da sua estrutura em partes que constituem o todo (Rivera & Becker, 2008).

Por exemplo, na primeira questão do problema, o 6.º termo da sequência pode ser determinado começando por duplicar o número de *pioneses* existentes em três lembretes. Neste caso, são considerados dois grupos de três lembretes que têm um *pionés* em comum. Isto implica que o resultado sofra um ajuste, através da subtracção do elemento repetido, assim teríamos a expressão $2\times10-1=19$. Na generalização distante esta abordagem também é aplicável mas, à medida que a ordem do termo aumenta, a sua aplicação vai-se tornando mais complexa. Veja-se o que acontece com 35 lembretes. Considerando o múltiplo de 3 mais próximo de 35, concluir-se-ia que seriam utilizados $12\times10-11=109$ *pioneses* para pendurar 36 lembretes. Para ter uma ideia mais clara observe-se, por exemplo, um modelo do 9.º termo da sequência, apresentado na Figura 8. Conclui-se que cada grupo de 3 lembretes tem 10 *pioneses* mas, de três em três lembretes, há uma sobreposição. O número de sobreposições corresponde a menos uma unidade do que a ordem do múltiplo de 3 utilizado, o que implica ter de subtrair 11 *pioneses*, no caso dos 36 lembretes.

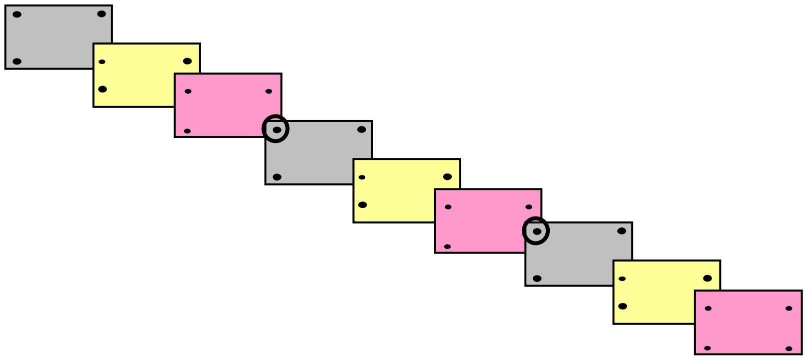


Figura 8 - Representação visual do 9.º termo da sequência

Nesta situação, impõe-se ainda um novo ajuste do resultado eliminando outros 3 *pioneses* já que foi considerado um lembrete extra. Este último exemplo mostra que o grau de dificuldade na utilização desta abordagem poderá aumentar, dependendo do tipo de números utilizados. Como a ordem do termo pretendido não é múltipla de 3 há necessidade de proceder a um segundo ajuste.

Esta estratégia poderia ainda conduzir a outras formas de *ver* o padrão, dando lugar a expressões diferentes das que foram apresentadas. Uma dessas possibilidades seria considerar múltiplos do primeiro termo da sequência e subtrair os elementos comuns. Por exemplo, na resolução da questão *2*, partindo do pressuposto que cada lembrete teria 4 *pioneses*, 35 lembretes necessitariam de 35×4 *pioneses* mas, como lembretes consecutivos partilham um *pionés*, é necessário subtrair aqueles que ficam sobrepostos, que são os intermédios. Teríamos deste modo a expressão 35×4–(35–1)=106.

Diferença. Os padrões de natureza linear estimulam normalmente a aplicação de um raciocínio recursivo, através da identificação da variação que ocorre na variável dependente. Analisando termos consecutivos desta sequência conclui-se que, ao acrescentar um lembrete, são colocados mais 3 *pioneses*, informação que permite prolongar a sequência até descobrir o número de *pioneses* usados, por exemplo, em seis lembretes (questão *1*), como se pode observar na Figura 9.

N.º de lembretes	N.º de *pioneses*
3	10
4	13
5	16
6	19

Figura 9 - Possível resolução da questão *1* da Tarefa1

Tal como na contagem, a continuação da sequência, utilizando a diferença entre termos consecutivos, não é uma estratégia muito eficaz na abordagem à generalização distante, devido à morosidade do processo. O recurso a um raciocínio multiplicativo contribui para ultrapassar este obstáculo, no entanto, como se trata de um padrão linear, a utilização de múltiplos da diferença comum conduz a uma resposta incorrecta, caso não seja efectuado um ajuste do resultado. Para determinar o número de *pioneses* utilizados em 35 lembretes, a aplicação desta estratégia poderia assumir diferentes formas. Por exemplo, sabendo que são necessários 10 *pioneses* para pendurar 3 lembretes, bastaria acrescentar os restantes 32 lembretes, considerando que cada um contribui com 3 *pioneses*, dando lugar à expressão numérica $10+(35-3)\times3$.

A questão *3*, embora também requeira uma generalização distante, envolve a reversibilidade do pensamento. Para determinar o número de lembretes que podem ser pendurados com 600 *pioneses* a estratégia diferença poderia ser utilizada da seguinte forma: $600\div3=200$, ou seja, teríamos 200 lembretes para 600 *pioneses*, mas como o primeiro precisa de mais um *pionés* e já foram todos usados, faz-se um ajuste eliminando um lembrete. Teríamos então $600\div3-1=199$.

Explícita. Um dos factores que condiciona a utilização de uma estratégia explícita, por parte dos alunos, relaciona-se com as suas capacidades visuais e as imagens mentais que criam acerca da situação problemática que lhes é apresentada. Este tipo de estratégia tem por base a interpretação do contexto do problema que dá lugar à descoberta da estrutura do padrão, permitindo gerar uma regra que relaciona directamente qualquer valor da variável dependente com o valor correspondente da variável independente (Lannin, Barker & Townsend, 2006).

A análise da disposição dos *pioneses* pelos lembretes pode conduzir à descoberta de diferentes expressões, ou seja, os alunos podem *ver* o padrão de várias formas o que influencia a generalização que efectuam. Embora seja uma estratégia mais utilizada quando se pretende uma generalização distante, esta abordagem pode ser usada na generalização próxima. Considere-se as seguintes hipóteses de exploração para a questão *2* desta tarefa, respectivamente representadas na Figura 10: (1) considerando que todos os lembretes têm 3 *pioneses*, à excepção do último que tem 4, obtemos uma expressão do tipo $3\times(35-1)+4$; (2) outra possibilidade seria *ver* 3 *pioneses* em cada lembrete verificando que no último há necessidade de acrescentar mais 1 *pionés*, neste caso a expressão seria $3\times35+1$; (3) por outro lado, se analisarmos a disposição dos *pioneses* na direcção vertical ou horizontal obtemos uma expressão alternativa às anteriores. É possível observar que nos extremos do conjunto de lembretes há sempre 2 *pioneses* e que na parte intermédia a distribuição é feita em grupos de três. Como o número de agrupamentos de 3 *pioneses* é inferior em uma unidade ao número de lembretes, ter-se-ia a expressão 2+(35−1)×3+2.

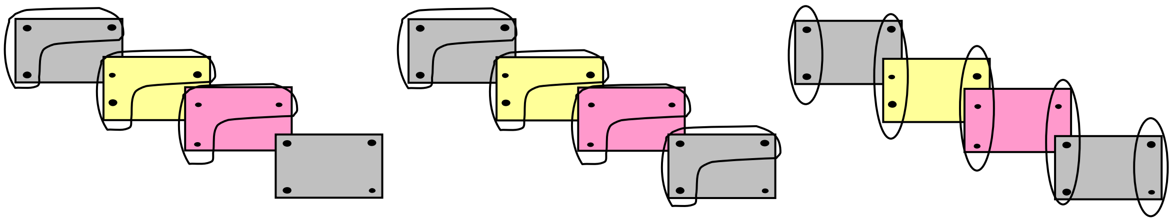


Figura 10 - Possíveis resoluções da questão *2* da Tarefa 1

Observando as resoluções apresentadas, verifica-se que as generalizações têm por base a decomposição da figura em partes, não havendo sobreposição de elementos, tornando-as generalizações de natureza construtiva. Qualquer uma destas abordagens poderia também ser utilizada na resolução da primeira questão, embora não seja muito comum, visto tratar-se de uma generalização próxima.

Após a descoberta de uma regra explícita, a exploração da questão *3* torna-se mais simples. Usando as relações evidenciadas na Figura 10, surgiriam as seguintes hipóteses de resolução: (1) considerando que o último lembrete necessita de 4 *pioneses* e que nos restantes apenas são colocados 3, separam-se 4 *pioneses* para o último lembrete e distribuem-se os 596 que sobram em grupos de três elementos. Com os 596 *pioneses* é possível pendurar 198 lembretes, tendo sobrado dois *pioneses*. Juntando o último lembrete, conclui-se que é possível pendurar 199 lembretes; (2) por outro lado, pensando que todos os lembretes têm 3 *pioneses* e que no último é necessário acrescentar mais um, coloca-se 1 *pionés* de parte e distribuem-se os 599 que sobram em grupos de três elementos. Com os 599 *pioneses* é possível pendurar 199 lembretes, tendo sobrado dois *pioneses*; (3) no último caso, tem-se dois pares de *pioneses* nas extremidades do conjunto de lembretes que se começa por retirar, ficando assim com 596 *pioneses* que podem ser agora distribuídos em grupos de três, na parte intermédia do conjunto de lembretes. Com os 596 *pioneses* é possível formar 198 grupos de 3, ou seja, pendurar 198 lembretes, mas ainda é necessário acrescentar um lembrete dos que tinham sido retirados inicialmente.

Tentativa e erro. Este tipo de abordagem implica que os alunos efectuem uma série de experiências com diferentes valores, enquadradas no contexto do problema. Apesar de ser uma estratégia que se adequa à resolução de questões de natureza algébrica, dependendo dos valores envolvidos, pode constituir um processo moroso, e raramente contribui para que os alunos compreendam de forma significativa a relação entre as variáveis envolvidas, já que se baseia no teste de casos particulares. Nesta tarefa, a utilização da tentativa e erro fará mais sentido após a identificação das condições do problema, ou seja, depois de ter sido interiorizada a forma como os *pioneses* se distribuem pelos lembretes. Na resolução da questão *3*, que envolve a reversibilidade do pensamento, os alunos poderão experimentar sucessivos valores para os lembretes até atingirem o número pretendido de *pioneses*, tendo em conta a forma como estão distribuídos. Desta forma, as tentativas efectuadas não serão casuais mas orientadas por condições específicas que os alunos descobriram previamente.

7.1.2. Tarefa 2 – *Piscinas*

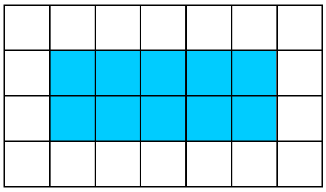
Nesta tarefa (Figura 11) pretende-se que os alunos descubram a relação entre as dimensões de uma piscina rectangular e o número de azulejos, de cada cor, utilizados na sua construção. Permite o estabelecimento de conexões entre tópicos geométricos e numéricos, através do desenvolvimento de conceitos como: reconhecimento de polígonos; cálculo de áreas e perímetros; manipulação de expressões numéricas; e exploração de quadrados perfeitos.

No que respeita à sua estrutura, apresenta uma formulação semelhante à tarefa anterior. O enunciado é acompanhado de uma figura que ilustra as condições descritas e promove o estabelecimento de generalizações e a reversibilidade do pensamento. No entanto, a natureza do padrão a explorar é diferente. Neste caso, estamos perante um padrão que contempla a possibilidade de fazer variar simultaneamente duas variáveis, neste caso, as dimensões da piscina.

Piscinas

Em cada alínea deves explicar detalhadamente o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

A empresa *Queda d'Água* constrói piscinas de fundo rectangular. Na construção de cada piscina são utilizados azulejos azuis, para o fundo, e azulejos brancos, para colocar no bordo. A figura ilustra uma piscina de dimensões 7×4 construída pela empresa *Queda d'Água*.



1. Determina o número de azulejos de cada cor para uma piscina de dimensões 10×6.
2. Supõe agora que a empresa construiu uma piscina de dimensões 30×90.

   2.1 Propõe uma expressão numérica que permita calcular o número de azulejos azuis necessários à construção dessa piscina. Explica como chegaste a essa expressão.

   2.2 Propõe agora uma expressão numérica para determinar o número de azulejos brancos existentes na piscina considerada. Explica como chegaste a essa expressão.
3. Imagina que a empresa dispõe de 300 azulejos azuis para construir a piscina de um cliente. Sabendo que este pretende uma piscina **quadrangular**, determina as **dimensões máximas** dessa piscina e o número de azulejos de cada tipo necessários à sua construção.

Adaptada de NCTM (1989)

Figura 11 - Enunciado da tarefa *Piscinas*

Esta estrutura torna mais complexa a formação de uma sequência, uma vez que há duas variáveis que podem alterar-se em simultâneo, o que implica que não seja facilmente identificada uma relação de tipo recursivo. Apenas no caso em que uma das dimensões da piscina é assumida como constante, fazendo variar a outra, se encontra uma relação desta natureza. Da mesma forma, também não será intuitivo para os alunos, após a análise do problema apresentado, formular uma estratégia de generalização apoiada num raciocínio de tipo proporcional, facto que também poderá ser condicionado pelo tipo de números utilizados no enunciado.

Após a descrição de aspectos relevantes desta tarefa, apresentam-se em seguida algumas possibilidades de resolução, com base nas estratégias contagem, explícita e tentativa e erro.

Contagem. Para determinar o número de azulejos de cada cor utilizados na construção de uma piscina com dimensões 10×6 (questão *1*), os alunos poderão recorrer a uma representação visual, semelhante à apresentada no enunciado, adaptando as dimensões da piscina, e contar directamente o número de azulejos.

Nas questões seguintes os alunos são confrontados com a generalização distante. Apesar de se poder considerar a contagem como uma estratégia aplicável nestes casos, não constitui uma abordagem eficaz, já que, à medida que as dimensões da piscina aumentam, torna-se um processo bastante exaustivo.

Explícita. A dificuldade em estruturar uma sequência organizada, associada à variação ocorrida nas dimensões da piscina, pode incentivar a procura de uma estratégia explícita para descobrir o padrão, principalmente na resolução das questões de generalização distante (questões *2* e *3*). Os alunos poderão descobrir uma regra que relacione directamente as dimensões da piscina e o número de azulejos que a constituem, tendo por base a representação visual apresentada na tarefa ou recorrendo a outros modelos, por eles criados, representativos de uma piscina nas condições descritas.

Dependendo da forma como os alunos *vêem* e interpretam o padrão, poderão obter diferentes expressões numéricas. Esta situação determina se a generalização estabelecida é construtiva ou desconstrutiva. Para clarificar estas possibilidades, apresenta-se a exploração de algumas hipóteses de resolução para a questão *2*.

Em qualquer piscina deste tipo, os azulejos azuis estão dispostos de forma rectangular. Logo, para determinar o número de azulejos desta cor, basta conhecer as dimensões do rectângulo azul e aplicar o conceito de área. Visualmente, pode verificar-se que as dimensões do rectângulo azul são inferiores em duas unidades às dimensões da piscina. Assim, para uma piscina de dimensões 30×90, teremos (30−2)×(90−2) azulejos azuis.

A investigação do número de azulejos brancos permite obter uma grande diversidade de expressões equivalentes. A Figura 12 reúne alguns exemplos, tomando como modelo uma piscina de dimensões 4×7, que implicam generalizações de natureza construtiva: (1) 2×(90−2)+2×(30−2)+4, contar os azulejos de cada um dos lados, excepto os cantos que são acrescentados posteriormente. Neste caso há ainda a possibilidade de relacionar os azulejos destacados na Figura 12 a rosa e a verde com o perímetro do rectângulo azul, permitindo assim o desenvolvimento de conceitos geométricos; (2)

2×(90–2)+2×30, contar os azulejos que constituem dois lados paralelos da piscina e adicionar os azulejos dos lados remanescentes subtraídos de duas unidades, uma vez que os cantos já foram contados; (3) 2×90+2×(30–2), resolução semelhante à apresentada no caso anterior; (4) 2×(90–1)+2×(30–1), retirar uma unidade ao número de azulejos que constituem cada um dos lados da piscina, assegurando desta forma que os cantos não sejam repetidos na contagem, e adicionar esses valores.

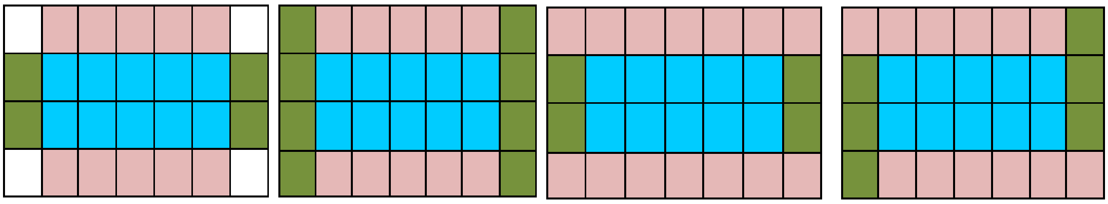


Figura 12 - Possíveis resoluções da questão *2.2* da Tarefa 2

A descoberta de uma expressão numérica que permita determinar o número de azulejos brancos poderá também ser resultado de uma generalização de natureza desconstrutiva, implicando os conceitos de área e perímetro: (1) 30×90–[(30–2)×(90–2)], contar todos os azulejos que constituem a piscina e subtrair os azulejos azuis, o que, no contexto geométrico, significa subtrair a área do rectângulo azul à área do rectângulo representado pela piscina; (2) (90×2)+(30×2)–4, adicionar os azulejos que constituem todos os lados da piscina e subtrair os cantos que foram contabilizados duas vezes. O contexto geométrico pode ser novamente explorado fazendo referência ao conceito de perímetro.

Na questão *3*, depois de determinar as dimensões do quadrado com área mais próxima de 300, e recorrendo às regras descobertas na resolução das questões anteriores, deduz-se facilmente o número de azulejos de cada cor, bem como as dimensões da piscina, usando o raciocínio inverso.

Tentativa e erro. Alunos desta faixa etária não têm um conhecimento formal do conceito de raiz quadrada, no entanto, tinham já abordado as potências de base e expoente naturais, em particular os quadrados perfeitos. Sabendo que se procura determinar as dimensões máximas de um quadrado com área próxima de 300, a estratégia tentativa e erro permite ultrapassar o facto de não terem disponível como ferramenta a raiz quadrada.

7.1.3. Tarefa 3 – Sequência de números

A tarefa *Sequência de números* (Figura 13) exibe características ligeiramente diferentes da maioria das tarefas exploradas no estudo, nas quais se recorre a um contexto visual explícito para representar o padrão. Neste caso, apresenta-se uma sequência numérica sendo o principal objectivo estudar a disposição dos números ao longo da mesma, formulando conjecturas acerca da posição ocupada por determinados elementos.

Sequência de números

Em cada alínea deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Considera a seguinte distribuição numérica:

	1	2	3	4
8	7	6	5	
	9	10	11	12
16	15	14	13	
	17	18	19	20
...				

1. Continua a sequência por mais duas linhas.
2. Explica a regra que te permitiu continuar a sequência na alínea anterior.
3. Investiga relações entre os números da sequência apresentada. Regista as tuas descobertas.
4. Em que posição aparecerá o número 40 na sequência dada?
5. Localiza, na sequência, a posição ocupada pelo número 81. E o número 542, onde figurará na sequência?

Adaptada de Zazkis e Liljedahl (2002)

Figura 13 - Enunciado da tarefa *Sequência de números*

Apesar de se tratar de um padrão numérico, a disposição dos números pode sensibilizar os alunos para uma exploração ou argumentação de carácter visual. Os elementos da sequência estão distribuídos espacialmente de uma forma particular e a posição associada a cada um desses números é parte integrante deste arranjo. Nesta perspectiva, o padrão evidenciado na tarefa pode ser simultaneamente considerado numérico e visual. É ainda possível identificar nesta distribuição numérica características próprias de um padrão de repetição, embora não convencional (Zazkis e Liljedahl, 2002).

Os números não se repetem ao longo da sequência, no entanto a sua estrutura visual é repetitiva, ou seja, a forma como os números estão distribuídos repete-se de duas em duas linhas ou de oito em oito elementos. Este ciclo repetitivo permite determinar mais facilmente a posição ocupada por determinado tipo de números, por exemplo, os múltiplos de 8 que surgem sempre na primeira coluna já que são os últimos números a surgir no fim de cada ciclo. A partir da posição dos múltiplos de 8, a localização de qualquer outro número torna-se mais acessível. Por outro lado, se a sequência for analisada coluna a coluna, em vez de continuamente ao longo das linhas, identificam-se vários padrões de tipo linear.

Tal como nas tarefas anteriores, as questões delineadas nesta tarefa promovem a generalização próxima (questão *1*) e distante (questões *4* e *5*). No entanto, também se tenta fomentar o desenvolvimento da capacidade de argumentação (por exemplo, na questão *2*) e a sensibilização para a procura de relações numéricas entre os elementos que integram a sequência (questão *3*). A maioria das questões centra-se na localização de determinados elementos da sequência, afastando-se um pouco do objectivo tradicional deste tipo de padrões nos quais se começa por identificar os elementos da sequência que ocupam uma dada posição. Na tarefa apresentada, a disposição espacial não convencional dos números poderá acarretar dificuldades adicionais na resolução das questões propostas.

A exploração desta tarefa permite encontrar uma grande diversidade de padrões que podem ser úteis na generalização distante, por exemplo: (1) na primeira coluna estão dispostos os múltiplos de 8; (2) na primeira e na última coluna encontram-se os múltiplos de 4; (3) a segunda e a quarta colunas são compostas por números ímpares e as restantes colunas por números pares (4) há sempre quatro números em cada linha o que permite encontrar sempre um múltiplo de 4 num dos extremos; (5) os números dispostos na primeira e na última colunas diferem em 8 unidades; (6) os números dispostos na terceira coluna diferem em 4 unidades; (7) os números da segunda coluna repetem a variação +6 e +2; (8) os números da quarta coluna repetem a variação +2 e +6. Para além destes, podem ser encontrados muitos outros padrões, por exemplo nas diagonais da sequência apresentada.

Para localizar a posição que um dado número ocupa na sequência apresentada, é necessário identificar características como a linha e a coluna associadas a esse número.

Neste sentido, é possível que possam ser combinadas várias estratégias para determinar a linha e a coluna pretendidas. Em seguida são exploradas algumas hipóteses de resolução.

Diferença. Na primeira questão da tarefa pede-se que os alunos continuem a sequência por mais duas linhas. Este tipo de questão promove a utilização do raciocínio recursivo (D_1), já que cada termo é encontrado tendo por base o anterior (Figura 14).

...				
24	23	22	21	
	25	26	27	28

Figura 14 - Possível resolução da questão *1* da Tarefa 3

Esta estratégia pode ainda ser aplicada na identificação da posição ocupada pelos números 40 (questão *4*) e 81 (questão *5.1*). No entanto, à medida que o elemento pretendido se torna mais distante, como é o caso do 542, este processo vai-se tornando pouco eficaz. Na resolução das questões *4* e *5.1*, esta estratégia pode ser aplicada de uma forma menos exaustiva, trabalhando apenas com a primeira coluna da sequência. Sabe-se que os números dispostos nesta coluna têm como primeiro termo o 8 e termos consecutivos diferem em 8 unidades. Desta forma, encontra-se mais facilmente os números 40 (1.ª coluna e 10.ª linha) e 81 (2.ª coluna e 21.ª linha) (Figura 15).

8	
-	
16	
-	
24	
-	
32	
-	
40	
-	
48	
-	
56	
-	
64	
-	
72	
-	
80	
-	81

Figura 15 - Possível resolução das questões *4* e *5* da Tarefa 3

Explícita. O estudo de relações entre os números da sequência (questão *3*) pode contribuir para a descoberta de padrões fundamentais na utilização de uma estratégia explícita. Por exemplo, a identificação da posição ocupada pelos múltiplos de 8 permite localizar qualquer outro número. Os múltiplos de 8 encontram-se na primeira coluna da sequência numérica e surgem de duas em duas linhas, o que significa que a linha se obtém duplicando a ordem do múltiplo de 8 considerado: (1) no caso do 40 (questão *4*), tratando-se de um múltiplo de 8, está na 1ª coluna e, sendo o 5.º múltiplo de 8, encontra-se na 10.ª linha; (2) o 81 (questão *5*) não é múltiplo de 8, mas pode utilizar-se um número que lhe seja próximo e que cumpra essa condição, por exemplo 80. Deste modo, conclui-se que 80 está na 1.ª coluna e 20.ª linha, o que significa que 81 estará na 2.ª coluna e na 21.ª linha; (3) para localizar o 542, que também não é múltiplo de 8, aplica-se um processo semelhante embora, neste caso, não seja tão intuitivo identificar um múltiplo de 8 que lhe seja próximo. Ao fazer 542÷8 obtém-se 67, que é a ordem do múltiplo de 8 mais próximo de 542, e resto 6, o que significa que, a partir do múltiplo de 8 encontrado ainda é necessário acrescentar mais seis elementos até obter 542. Com esta informação conclui-se que ocupará a 3.ª coluna e a 136.ª linha.

Como já se referiu previamente, esta tarefa pode promover a utilização de diferentes estratégias para dar resposta à mesma questão. Por exemplo, a estratégia explícita poderá ser conjugada com as estratégias termo unidade ou mesmo tentativa e erro (Figura 16). No entanto, salvaguarda-se que há outras hipóteses de conjugar várias estratégias na identificação da linha e da coluna ocupadas por um número.

	Proposta de resolução	Estratégias de generalização
Questão *4*	40 é múltiplo de 8 logo está na 1ª coluna. Como 20 está na 5ª linha então 40 está 10ª linha.	Explícita e termo unidade (TU_1)
Questão *5*	Como 542 não é múltiplo de 8, fazem-se tentativas para procurar um múltiplo de 8 próximo de 542. Depois de encontrar esse número sabe-se imediatamente a coluna e a linha por ele ocupadas, ajustando-se posteriormente ao 542. Por exemplo, 536=8×67, logo 536 está na 1ª coluna e na 134ª linha e assim 542 ocupará a 3ª coluna e a 136ª linha.	Explícita e tentativa e erro

Figura 16 - Possíveis resoluções das questões *4* e *5* da Tarefa 3

É ainda possível optar por explorações semelhantes tendo por base outras relações numéricas. Por exemplo, os múltiplos de 4 também ocupam posições privilegiadas, surgindo alternadamente na primeira e na última colunas, em linhas consecutivas da sequência. Além disso, a localização dos números pares e ímpares em colunas alternadas também podem conduzir à exclusão de hipóteses na resolução de algumas questões da tarefa.

7.1.4. Tarefa 4 – A Pizzaria Sole Mio

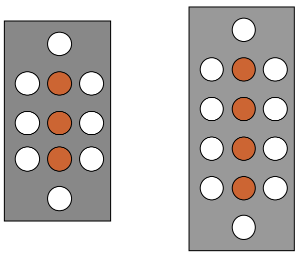
Nesta tarefa (Figura 17) apresenta-se um problema contextualizado que envolve a exploração de um padrão linear crescente. Tal como nas tarefas anteriores, o enunciado tem uma componente visual explícita, contemplando a representação de dois termos da sequência, nomeadamente o terceiro e o quarto. As figuras são utilizadas com o intuito de contribuir para que os alunos sejam capazes de, mais facilmente, estabelecer relações entre as variáveis envolvidas.

O problema envolve essencialmente a descoberta de relações entre o número de pizzas e o número de pessoas que se sentam em cada mesa, promovendo situações de generalização próxima (questões *1* e 4.1) e de generalização distante (questões *2*, *3* e 4.2).

A Pizzaria Sole Mio

Em cada alínea deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

As figuras mostram duas mesas da Pizzaria *Sole Mio*, uma com 8 pessoas e 3 pizzas e outra com 10 pessoas e 4 pizzas.



1. Sabendo que numa das mesas foram colocadas 10 pizzas, quantas pessoas estariam sentadas?
2. E se fossem 31 pizzas? Quantas pessoas estariam sentadas nessa mesa?
3. O João decidiu comemorar o seu aniversário neste restaurante e convidou 57 pessoas. Quantas pizzas terá de encomendar para a sua mesa?
4. As pizzas devem ser partilhadas pelas pessoas de cada mesa. Sabendo que o João adora pizza, ajuda-o a resolver os seguintes problemas:

   4.1. Se ele distribuir os seus convidados por mesas de 8 e 10 pessoas, como as que vês nas figuras, qual a mesa que o João deveria escolher de forma a comer maior quantidade de pizza?

   4.2. Achas que o João deve convidar mais ou menos pessoas, de forma a comer maior quantidade de pizza? (Sugestão: experimenta para alguns casos)

Adaptada de NCTM (2000)

Figura 17 - Enunciado da tarefa *A Pizzaria Sole Mio*

Tal como em tarefas anteriores, procura-se ainda que os alunos desenvolvam a reversibilidade do pensamento, sendo capazes de determinar a ordem que um determinado termo da sequência ocupa (questão *3*).

Esta tarefa potencia o desenvolvimento de uma grande diversidade de tópicos matemáticos. Apesar de incidir principalmente na utilização de números racionais, fraccionários e decimais, e na sua comparação, proporciona ainda a oportunidade de trabalhar a divisão e, embora de uma forma não tão evidente, os conceitos de dobro e simetria, bem como a utilização de expressões numéricas.

Depois de uma breve descrição das principais características associadas a esta tarefa, passa-se a uma exploração de algumas hipóteses de resolução das questões propostas, recorrendo a diferentes estratégias.

Contagem. A primeira questão da tarefa pode ser resolvida utilizando como estratégia a contagem. Neste caso, o objectivo passa por determinar o décimo termo da sequência, pretendendo-se assim o estabelecimento de uma generalização próxima. Deste modo, basta desenhar uma mesa com 10 pizzas, colocando as pessoas numa disposição semelhante à dos exemplos fornecidos no enunciado, para posteriormente proceder à sua contagem.

Embora não seja uma estratégia tão eficaz na resolução de problemas de generalização distante, poderá também ser aplicada nestes casos, em particular na resolução das questões *2* e *3*, recorrendo às respectivas representações visuais.

Termo unidade. O facto de o padrão evidenciado nesta tarefa ser de tipo linear, faz com que a utilização de um raciocínio proporcional seja desadequada, a não ser que se proceda a um ajuste do resultado.

Por exemplo, na primeira questão da tarefa, apesar de 10 não ser múltiplo de nenhum dos termos apresentados, terceiro e quarto, os alunos podem identificar o quinto termo da sequência e, a partir daí, duplicar o número de pessoas. Ao usar esta estratégia está-se a considerar duas mesas disjuntas com 5 pizzas e 12 pessoas em cada mesa. Ao fazer a junção das duas mesas, mantendo a forma como as pessoas se sentam, devem ser eliminados 2 elementos, correspondentes às pessoas sentadas numa das pontas de cada mesa, como se pode observar na Figura 18. Deste modo, numa mesa com 10 pizzas estariam sentadas $2\times12-2=22$ pessoas.

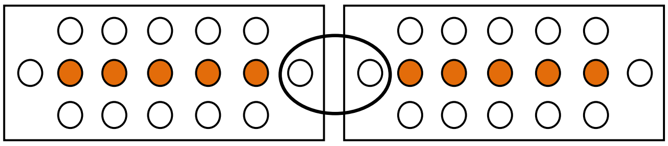


Figura 18 - Possível resolução da questão *1* da Tarefa 4

Este procedimento pode repetir-se na resolução da questão *2*, embora seja necessário efectuar um segundo ajuste ao resultado, pelo facto de 31 ser um número primo. Sabendo que numa mesa com 10 pizzas estão sentadas 22 pessoas então, numa mesa com 30 pizzas estariam sentadas $3\times22-4=62$ pessoas. Como se pretende descobrir o 31.º termo da sequência, basta acrescentar 1 pizza o que implica acrescentar 2 pessoas às 62 obtidas anteriormente.

Em qualquer um dos casos, o ajuste efectuado, após o recurso a múltiplos de termos conhecidos, relaciona-se com a contagem repetida de determinados elementos. Este tipo de raciocínio constitui uma generalização desconstrutiva já que a descoberta do padrão incide na identificação de sobreposições como consequência da utilização de unidades repetidas.

Diferença. Esta tarefa pode potenciar a utilização da estratégia recursiva (D_1), por um lado por se tratar de um padrão linear, mas também por serem apresentados no enunciado dois termos consecutivos da sequência. Pode observar-se que, ao acrescentar uma pizza na mesa, são adicionadas 2 pessoas, o que significa que a diferença entre termos consecutivos é de 2 unidades. Este conhecimento pode contribuir para a resolução da primeira questão, através do prolongamento da sequência até ao 10.º termo (Figura 19).

N.º de pizzas	N.º de pessoas
3	8
4	10
5	12
6	14
7	16
8	18
9	20
10	22

Figura 19 - Possível resolução da questão *1* da Tarefa 4

À medida que a ordem do termo pretendido vai aumentando, esta estratégia, à semelhança da contagem, torna-se cada vez mais exaustiva. No entanto, também pode ser utilizada na resolução das questões *2* e *3*, prolongando a tabela até obter 31 pizzas e 58 pessoas, respectivamente.

Em alternativa à generalização aritmética anteriormente descrita, pode usar-se um raciocínio multiplicativo, recorrendo a múltiplos da diferença entre termos consecutivos. Mas, tratando-se de um padrão linear, é necessário proceder a um ajuste do resultado obtido, aplicando assim a estratégia D_3. Por exemplo, sabendo que 4 pizzas correspondem a 10 pessoas, para determinar o número de pessoas que estariam sentadas numa mesa com 31 pizzas (questão *2*), bastaria fazer $10+(31-4)\times 2=64$. Este tipo de abordagem, em que se adiciona repetidamente grupos de 2 elementos, correspondentes às pessoas que se acrescentam ao colocar uma nova pizza na mesa, constitui uma generalização construtiva.

Explícita. A análise do contexto do problema e das representações visuais, associadas a alguns termos da sequência, poderá conduzir à descoberta de uma regra que permita estabelecer uma relação imediata entre a variável dependente e a variável independente. Dependendo da forma como os alunos *vêem* a estrutura do padrão, como interpretam a disposição espacial das pessoas em torno das pizzas, a estratégia explícita pode ser aplicada de diversas maneiras. Na Figura 20 podem ser observadas algumas hipóteses de exploração, usando como exemplo uma mesa com 5 pizzas.

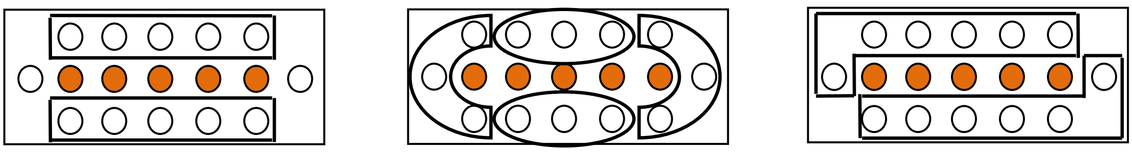


Figura 20 - Representação visual do 5.º termo da sequência

Aplicando cada um dos casos observados na Figura 20 à resolução da questão *2*, obtêm-se, respectivamente, as seguintes expressões numéricas: (1) $2\times 31+2$, considerando que o número de pessoas que se sentam nas partes laterais da mesa corresponde ao dobro do número de pizzas, tendo ainda que adicionar as pessoas sentadas nas pontas da mesa; (2) $2\times 3+2\times(31-2)$, já que são identificados dois conjuntos de 3 elementos nos extremos da mesa, sobrando ainda dois conjuntos, com menos 2 pessoas do que o número de pizzas, situados nas partes laterais da mesa; e (3) outra possibilidade seria $(31+1)\times 2$, se as pessoas forem divididas em dois grupos com igual número de elementos, contemplando cada um as pessoas sentadas numa das laterais da mesa e uma das que se encontra na ponta da mesa.

Estas possibilidades são também aplicáveis à primeira questão da tarefa, efectuando as devidas adaptações.

Qualquer um dos casos explorados resultou da decomposição da figura base em partes disjuntas. As expressões obtidas surgiram da junção das componentes identificadas o que as torna generalizações de natureza construtiva.

A questão *3* potencia a reversibilidade do pensamento, sendo solicitada aos alunos a descoberta da posição ocupada por um dado termo. Usando o contexto do problema, pretende-se saber o número de pizzas necessárias numa mesa com 58 pessoas. Recorrendo às relações evidenciadas na Figura 20, ter-se-ia: (1) $(58-2)\div2$, uma vez que o número de pizzas corresponde ao número de pessoas sentadas numa das laterais da mesa; (2) $(58-2\times3)\div2+2$, retirando os dois pares de três elementos situados nos extremos da mesa, determina-se o número de pizzas partilhadas pelas pessoas que estão no centro, posteriormente é necessário adicionar 2 pizzas correspondentes aos elementos sentados nos extremos; e (3) $58\div2-1$, após a distribuição das pessoas em dois grupos iguais, é ainda necessário efectuar um ajuste, eliminando uma pizza correspondente aos elementos sentados nas pontas da mesa.

Tentativa e erro. Os alunos poderão aplicar a tentativa e erro de uma forma orientada, recorrendo às condições do problema e até mesmo à identificação prévia de uma regra, ou utilizar esta estratégia de uma forma mais intuitiva, fazendo experiências com casos particulares até encontrar a resposta. Como é óbvio, neste tipo de tarefas, a utilização desta estratégia é mais eficaz se previamente for identificada a forma como as pessoas se dispõem em volta das pizzas, dando assim lugar à execução de tentativas orientadas. No caso da questão *3*, os alunos poderão experimentar diversos valores para o número de pizzas até obterem as 58 pessoas, tendo sempre por base o cumprimento das condições determinadas.

7.1.5. Tarefa 5 – *Dobragens*

No que refere ao tipo de questões formuladas, esta tarefa (Figura 21) tem uma estrutura idêntica às anteriores, incidindo na generalização próxima e distante. No entanto, apresenta algumas características que a distinguem. Por um lado, o enunciado não contempla representações visuais explícitas do contexto descrito e conduz à exploração de um padrão não linear, de tipo exponencial.

Apesar de não existir uma componente visual explícita na tarefa, os alunos têm a possibilidade de utilizar material manipulável para modelar a situação, neste caso uma folha de jornal. Deste modo, ao contactar com uma representação do contexto de âmbito concreto, acabam por aceder a uma perspectiva visual do mesmo.

Dobragens

Em cada alínea deves explicar detalhadamente o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Para resolver esta tarefa vais utilizar uma folha de jornal. Segue as instruções indicadas em cada uma das questões e regista as tuas descobertas.

1. Dobra a folha de jornal a meio. Em seguida dobra-a novamente a meio. Repete o processo mais uma vez. Em quantas partes iguais ficará dividida a folha depois de a abrires? Explica a tua previsão e confirma o resultado abrindo a folha.
2. E se dobrasses a folha a meio 7 vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida? Explica o teu raciocínio.
3. Consegues encontrar uma relação entre o número de dobragens efectuadas e o número de partes iguais em que a folha fica dividida? Explica como pensaste.
4. Para a folha ficar dividida em 1024 partes iguais, quantas dobragens terias de fazer?
5. Tomando a folha de jornal como unidade de área, determina a área de cada uma das partes obtidas nas questões **1** e **2**.

Figura 21 - Enunciado da tarefa *Dobragens*

Um dos grandes objectivos desta tarefa passa pela descoberta de uma relação directa entre o número de dobragens e o número de partes em que a folha fica dividida (questão *3*), o que implica o reconhecimento dos números obtidos como sendo potências de base 2. Deste modo, pretende-se essencialmente mobilizar os conhecimentos dos alunos sobre potências de base e expoente naturais. No entanto, a tarefa *Dobragens*, possibilita ainda o desenvolvimento de outros tópicos matemáticos, como: dobro; utilização de números racionais (fraccionários e decimais); área; e divisão.

Como já se referiu, um dos traços comuns às tarefas propostas neste estudo, passa pela inclusão de questões que promovem a generalização próxima (questões *1* e *5.1*) e a generalização distante (questões *2*, *3*, *4* e *5.2*). Tratando-se de um padrão exponencial, a progressão ao longo da sequência implica que a ordem de grandeza dos termos aumente consideravelmente. A utilização da estratégia contagem, com recurso à folha de jornal, deixa de ser eficaz ao fim de algumas dobragens, tornando-se cada vez mais difícil dobrar a folha por razões físicas. Por esta razão, considera-se que a questão *2* se enquadra numa generalização distante, apesar de ser pedido o 7.º termo da sequência.

De seguida, são apresentadas algumas propostas de resolução da tarefa, tendo por base algumas estratégias de generalização.

Contagem. Esta estratégia pode ser utilizada em duas vertentes. Recorrendo às sucessivas dobragens da folha de jornal, efectuando posteriormente a contagem do número de partes iguais em que esta ficou dividida, e/ou representando, através de um desenho, a folha e a respectiva divisão.

Apesar de, na primeira questão, se pedir uma previsão do número de partes que constituem a folha, esta conjectura pode ter por base uma representação visual construída pelos alunos, à medida que efectuam as dobragens, ou um modelo mental, a partir do qual vão sucessivamente fazendo a contagem das secções. Em qualquer um destes casos está subjacente esta estratégia. Após algumas experiências de dobragem, o material começa a apresentar limitações, ou seja, a dado momento torna-se fisicamente impossível dobrar a folha, o que acaba por invalidar esta abordagem. Neste caso, os alunos podem optar por simular esta situação através de um desenho, mas, o aumento significativo do número de dobragens, vai tornando esta representação cada vez mais complexa.

Diferença. O cálculo do número de partes em que a folha fica dividida pode ser feito com base na estratégia recursiva (D_1). Apesar de se pedir uma previsão, a exploração do material na questão *1* pode contribuir para que os alunos descubram uma relação recursiva. A análise da variação que ocorre entre termos consecutivos permite aos alunos determinar qualquer termo da sequência, desde que seja conhecido o anterior. Esta abordagem pode traduzir-se num raciocínio de tipo aditivo, se os alunos identificarem que cada termo resulta da adição do valor anterior a ele próprio, ou multiplicativo, se concluírem que qualquer termo é o dobro do anterior. A Figura 22 ilustra a utilização da estratégia recursiva, na resolução da questão *2*.

N.º de dobragens	N.º de partes
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128

Figura 22 - Possível resolução da questão *2* da Tarefa 5

Esta estratégia aplica-se ao cálculo de valores particulares não muito distantes, podendo deste modo ser utilizada na resolução das questões *1*, *2* e *4*. O raciocínio recursivo centra-se apenas na variação ocorrida nos valores associados à variável dependente, logo não permite obter uma expressão geral que relacione as duas variáveis. Deste modo, não se adequa à resolução da questão *3*.

No âmbito da estratégia diferença, D_2 e D_3 não se aplicam a um modelo exponencial, uma vez que a diferença entre termos consecutivos não é constante.

Explícita. Nesta tarefa, a estratégia explícita é especialmente importante na resolução da questão *3*. Pede-se a identificação de uma regra que relacione as variáveis em jogo, número de dobragens e número de partes iguais em que a folha fica dividida. O padrão pode ser traduzido pela seguinte relação: n.º de partes=$2^{\text{n.º de dobragens}}$. A regra pode surgir, por exemplo, da observação dos números que surgem na exploração dos casos anteriores (questões *1* e *2*), concluindo que estamos perante potências de base 2 e que o expoente corresponde ao número de dobragens efectuadas (Figura 23).

N.º de dobragens	N.º de partes
1	$2=2^1$
2	$4=2\times2=2^2$
3	$8=2\times2\times2=2^3$
4	$16=2\times2\times2\times2=2^4$
5	$32=2\times2\times2\times2\times2=2^5$
6	$64=2\times2\times2\times2\times2\times2=2^6$
7	$128=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^7$

Figura 23 - Possível resolução da questão *2* da Tarefa 5

O contacto com a componente visual, através da manipulação da folha ou da modelação da situação na forma de desenho, também poderá contribuir para a identificação da regra. Na Figura 24 estão representados os resultados das quatro primeiras dobragens. A partir desta situação conclui-se que a primeira dobragem divide a folha em duas partes iguais e que, a cada nova dobragem, o número de secções duplica, obtendo-se assim as potências de base 2.

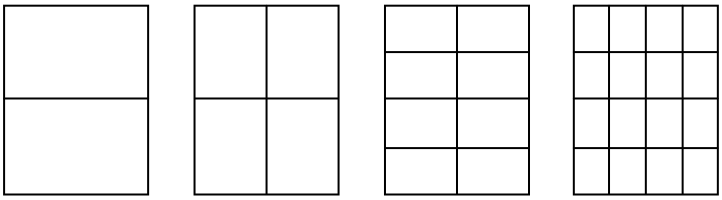


Figura 24 - Representação visual dos primeiros 4 termos da sequência

Tentativa e erro. Nesta tarefa, a estratégia tentativa e erro fará mais sentido se for utilizada de uma forma orientada, recorrendo à regra que relaciona o número de dobragens com o número de partes em que a folha fica dobrada. No caso da questão *4*, os alunos poderão experimentar diversos valores para o número de dobragens até obterem as 1024 partes, tendo sempre por base o cumprimento das condições determinadas.

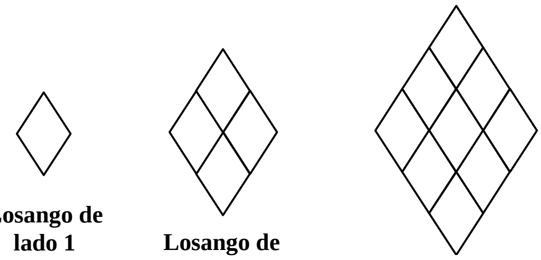
7.1.6. Tarefa 6 – Sequência com losangos

Na tarefa *Sequência de losangos* (Figura 25), pretende-se essencialmente que os alunos descubram a relação entre o comprimento do lado de qualquer losango da sequência e o número de peças utilizadas na sua construção. Deste modo, o padrão evidenciado nesta tarefa é de tipo não linear.

Sequência de losangos

Em cada alínea deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Considera a seguinte sequência de losangos:



Sabendo que são utilizadas peças de lado 1 (o mesmo que losangos de lado 1) na construção de qualquer losango da sequência dada:

1. Quantas peças são necessárias para construir um losango:

1.1. De lado 4?

1.2. De lado 50?

2. Supondo que foram utilizadas 324 peças na construção de um dado losango da sequência, determina o seu perímetro.

3. Se o lado de um losango for o triplo de outro como se relacionam:

3.1. Os perímetros das duas figuras?

3.2. As áreas das duas figuras?

Escreve uma regra para cada alínea da questão **3**.

Adaptada de Friel, Rachlin and Doyle (2001)

Figura 25 - Enunciado da tarefa *Sequência de losangos*

No enunciado são apresentadas figuras representativas dos três primeiros termos da sequência, permitindo assim que os alunos criem uma imagem mental dos elementos que a constituem. Tal como nas restantes tarefas, são identificadas questões de generalização próxima (questão *1.1*) e distante (questões *1.2*, *2*, *3.1* e *3.2*) que contribuem para o estabelecimento de conexões entre tópicos geométricos e numéricos como: propriedades de polígonos, área, perímetro, manipulação de expressões numéricas, exploração de quadrados perfeitos (por exemplo como soma de números ímpares consecutivos).

Após a referência a alguns aspectos específicos desta tarefa, apresentam-se algumas hipóteses de exploração.

Contagem. Esta estratégia adequa-se à exploração de questões de generalização próxima, como o caso da alínea *1.1*. Basta para isso construir um losango com as dimensões pedidas, efectuando a divisão nas peças que o constituem, e proceder à contagem dos elementos pedidos.

Diferença. Sendo este um padrão não linear, a variação entre termos consecutivos não é constante, o que implica que, nesta situação, as estratégias D_2 e D_3 não se aplicam já que tomam por base múltiplos da diferença. No entanto, no âmbito da estratégia diferença pode utilizar-se o raciocínio recursivo (D_1), principalmente se estiver implicada a descoberta de termos próximos. A tradução da informação, representada nas figuras associadas aos três primeiros termos, para o contexto numérico, permite explorar o tipo de variação que ocorre ao longo da sequência.

Comprimento do lado	N.º de peças
1	1
2	4
3	9

Figura 26 - Dados numéricos relativos aos três primeiros termos da sequência

Analisando os valores apresentados na Figura 26, verifica-se que o segundo losango tem mais 3 peças do que o primeiro e que o terceiro tem mais 5 peças do que o segundo. Uma possível conclusão, do estudo destas relações numéricas, poderá ser que o losango de lado 4 terá mais 7 peças do que o anterior, ou seja área 16. A observação atenta das representações visuais dos três primeiros termos (Figura 27) permite identificar de forma clara a variação descrita.

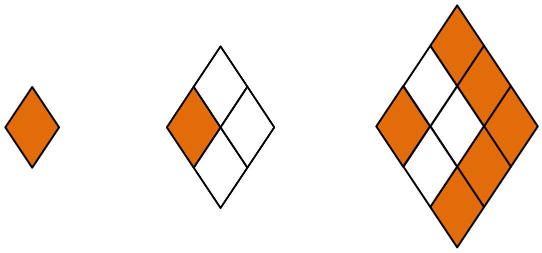


Figura 27 - Representação visual dos três primeiros termos da sequência

Se em cada losango se considerarem os conjuntos destacados com cores diferentes, verifica-se que no losango de lado 1 há uma peça, no losango de lado 2 há 1+3=4 peças e no losango de lado 3 há 1+3+5=9 peças. Desta forma, o losango de lado 4 será constituído por 1+3+5+7=16 peças. Conclui-se, por exemplo, que a área do losango pode ser obtida a partir da soma de números ímpares consecutivos. Sublinha-se, no entanto, que, à medida que a ordem do termo vai aumentando, este processo vai sendo cada vez mais exaustivo.

Explícita. Nas duas primeiras questões da tarefa (*1.1* e *1.2*) pretende-se que os alunos determinem o número de peças necessárias à construção dos losangos de lado 4 e de lado 50, respectivamente. A estratégia explícita pode ser aplicada, nestes casos, usando o conceito de área, ou de uma forma mais intuitiva, interpretando a distribuição das peças por filas, estabelecendo assim uma relação multiplicativa. De qualquer modo, a expressão numérica resultante é equivalente, no primeiro caso o losango tem $4\times4=16$ peças e no segundo caso $50\times50=2500$ peças.

Embora esta seja a abordagem mais intuitiva, podem surgir outras estratégias de natureza explícita, com base na interpretação das figuras. Usando, como exemplo, as representações visuais dos losangos de lado 3 e lado 4 (Figura 28), verifica-se que, em cada termo pode ser identificado um losango central emoldurado por uma série de losangos. A regra deduzida traduz-se numa generalização desconstrutiva, pois há losangos comuns a cada dois lados da moldura. Aplicando esta estratégia aos dois casos considerados, conclui-se que o número de peças do losango de lado 3 é dado pela expressão $1\times1+4\times3-4$ e o número de peças do losango de lado 4 determina-se fazendo $2\times2+4\times4-4$. No termo de ordem 50 (questão *1.2*), tem-se um losango central de lado 48 (50−2), enquadrado por uma moldura com 50 losangos em cada lado, o que resulta em $48\times48+4\times50-4=2500$ peças.

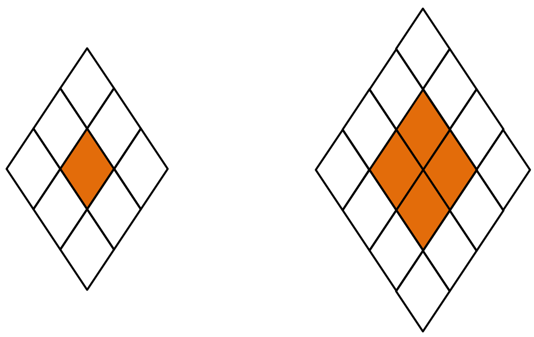


Figura 28 - Representação visual do 3.º e 4.º termos da sequência

Tentativa e erro. Depois de identificada uma regra que relacione o comprimento do lado de cada losango com o número de peças que o constitui, os alunos poderão recorrer à tentativa e erro para resolver a questão *2*. Esta estratégia permite contornar o facto de estes alunos não possuírem um conhecimento formal do conceito de raíz quadrada, já que neste caso se pretende que descubram o lado do losango que é constituído por 324 peças. Utilizando o conceito de área, podem experimentar sucessivos valores para o lado do losango até obter o número de peças pretendidas.

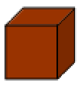
7.1.7. Tarefa 7 – Cubos de chocolate

Apesar de haver alguns pontos de contacto entre a estrutura da tarefa *Cubos de chocolate* (Figura 29) e as anteriores, há algumas características que a distinguem. Trata-se de um problema contextualizado, no qual os alunos devem relacionar o comprimento da aresta de qualquer cubo com o número de unidades de volume que possuem um determinado número de faces cobertas de chocolate.

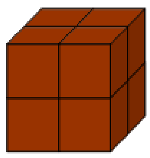
Cubos de chocolate

Em cada alínea deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Na chocolataria *Chocobom* vendem cubinhos de caramelo com cobertura de chocolate. Como esta especialidade é muito procurada decidiram fazer cubos de caramelo de várias dimensões, construídos a partir dos mais pequenos, mergulhando-os posteriormente em chocolate, como mostra a figura.



Cubo de aresta 1



Cubo de aresta 2

1. O João comprou na *Chocobom* um cubo de aresta 3 que decidiu partilhar com os seus amigos. Para isso teve que desmanchar o seu cubo, mas reparou que nem todos os cubinhos tinham o mesmo número de faces com chocolate. Descobre quantos cubinhos têm 1 única face de chocolate. E quantos têm 2 faces cobertas de chocolate? E 3? E nenhuma?
2. Experimenta agora com cubos de outras dimensões. Descobre quantos cubinhos teriam 1 só face de chocolate. E quantos teriam 2 faces de chocolate? E 3? E nenhuma?
3. Explica como poderias determinar quantos cubinhos teriam 1, 2, 3 e nenhuma faces de chocolate, num cubo de aresta 10.

   Sugestão: Organiza numa tabela, a informação obtida nas alíneas anteriores.

Figura 29 - Enunciado da tarefa *Cubos de chocolate*

As quatro situações possíveis (0, 1, 2 ou 3 faces com chocolate) geram uma diversidade de relações que dão lugar a padrões de tipo linear e não linear.

Para facilitar a compreensão da tarefa, e de modo a que os alunos possam criar uma imagem mental da situação proposta, são apresentadas as representações visuais dos dois primeiros termos da sequência. No entanto, como esta tarefa envolve relações espaciais e capacidades relacionadas com a visualização espacial, e tendo em conta que este tipo de representações nem sempre se afiguram fáceis para os alunos, achou-se pertinente a utilização de material concreto, nomeadamente cubos de encaixe. Os tópicos matemáticos em destaque nesta tarefa são essencialmente geométricos, como: reconhecimento do cubo (propriedades e elementos), volume e área da superfície de um cubo.

Como nas restantes tarefas são colocadas questões que potenciam a generalização próxima e distante. Na questão *1*, os alunos devem identificar o terceiro termo da sequência e determinar quantos cubos unitários existem com um determinado número de faces pintadas. Tratando-se do termo seguinte da sequência e sabendo que a sua construção com material concreto é um processo simples, esta questão implica uma generalização próxima. À medida que o comprimento da aresta do cubo vai aumentando, a sua construção vai-se tornando cada vez mais exaustiva e, a partir de um certo valor, devido às limitações do material, deixa de ser possível. Neste sentido na terceira questão da tarefa está-se perante uma generalização distante. Dependendo dos casos escolhidos pelos alunos, na resolução da questão *2*, o tipo de generalização pode variar.

As questões propostas podem ser exploradas de diferentes formas. Em seguida, são apresentadas algumas possibilidades de resolução.

Contagem. Na resolução da primeira questão da tarefa e até mesmo da segunda, dependendo dos casos que os alunos escolherem, podem proceder à construção do cubo pretendido e utilizar a contagem com base no agrupamento de elementos, identificando grupos de cubos unitários que tenham um número comum de faces pintadas, ou optar por uma contagem termo a termo. Como já se referiu, à medida que o comprimento da aresta do cubo aumenta esta estratégia deixa de ser eficaz, por um lado pela morosidade do processo mas também pelas limitações físicas do material.

Diferença. Após a exploração de alguns casos e o registo dos valores encontrados numa tabela (Figura 30), a análise da diferença entre termos consecutivos, pode conduzir a algumas conclusões. A leitura vertical dos valores dispostos na tabela permite verificar que, o número de cubos unitários com 3 faces de chocolate não varia, é sempre 8 independentemente do comprimento da aresta do cubo inicial. Por outro lado, também se observa que, ao aumentar uma unidade ao comprimento da aresta do cubo, são acrescentados 12 cubos unitários com 2 faces de chocolate. Nestas duas situações, em que os padrões têm respectivamente uma estrutura constante e linear, o raciocínio de tipo recursivo (D_1) revela-se uma estratégia eficaz no cálculo de valores próximos. Para valores distantes, o recurso a D_3, constitui uma alternativa viável no que refere ao cálculo do número de cubos unitários com 2 faces de chocolate, já que a sua estrutura multiplicativa torna o processo menos exaustivo.

Explícita. A impossibilidade de recorrer à modelação com material manipulável, devido às dimensões do cubo, pode ser ultrapassada pela aplicação da estratégia explícita. Este tipo de abordagem passa pela identificação de regras que relacionem directamente o comprimento da aresta com o número de cubos unitários com um determinado número de faces pintadas.

As descobertas evidenciadas pelo estudo do cubo de aresta 3 (questão *1*) e de cubos de outras dimensões (questão *2*), podem ser registadas numa tabela cuja leitura horizontal contribui para o estabelecimento de relações numéricas entre a variável dependente e a variável independente. A exploração dos casos destacados na Figura 30 e, em particular, dos valores que sucessivamente vão surgindo pode conduzir à formulação das regras representadas a azul e que permitem determinar directamente o número de cubos com 0, 1, 2 e 3 faces com chocolate, presentes num cubo de aresta 10.

Comprimento da aresta	N.º de cubos com			
	0 faces de chocolate	1 face de chocolate	2 faces de chocolate	3 faces de chocolate
2	$0=0\times0\times0$	0	$0=12\times0$	8
3	$1=1\times1\times1$	$6=6\times1$	$12=12\times1$	8
4	$8=2\times2\times2$	$24=6\times4$	$24=12\times2$	8
5	$27=3\times3\times3$	$54=6\times9$	$36=12\times3$	8
...	...	...	...	...
10	$8\times8\times8$	6×8^2	12×8	8

Figura 30 - Possível resolução da questão *3* da tarefa 7

Em alternativa, a estratégia explícita pode surgir da observação dos modelos concretos. Ao proceder à construção dos cubos, é possível identificar regras de contagem dos cubos com 0, 1, 2 e 3 faces com chocolate. Neste caso, pode ser útil utilizar cubos de encaixe de cor diferente para salientar cada um destes grupos. Veja-se, por exemplo, uma representação dos cubos de arestas 3, 4 e 5 (Figura 31).

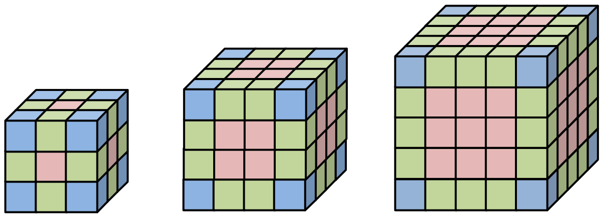


Figura 31 - Representação visual dos cubos de arestas 3, 4 e 5

Observando os modelos apresentados verifica-se que, independentemente do comprimento da aresta do cubo, serão sempre 8 os cubos unitários com 3 faces de chocolate, coincidindo assim com os vértices do cubo inicial. Ao analisar a localização dos cubos unitários com 2 faces de chocolate, verifica-se que ao longo das 12 arestas que constituem o cubo inicial todos os cubos unitários, excepto os que se encontram nos vértices, têm 2 faces de chocolate. Logo em cada aresta o número de cubos deste tipo inferior em 2 unidades à aresta do cubo inicial. Por sua vez, os cubos unitários com 1 face de chocolate formam um quadrado em cada face do cubo inicial. O lado de cada um destes quadrados tem menos duas unidades do que a aresta do cubo. Para analisar o número de cubos unitários com 0 faces de chocolate torna-se necessário desmontar o cubo, já que aqueles se encontram no seu interior. Neste caso, conclui-se que existe sempre um cubo central cuja aresta tem menos 2 unidades do que a do cubo inicial. Em alternativa, somam-se os cubos unitários com 1, 2 e 3 faces de chocolate e subtrai-se esse valor ao volume do cubo.

7.2. Síntese

As tarefas seleccionadas neste estudo têm como característica comum a exploração de padrões, essencialmente, através do estudo de situações que potenciam a generalização próxima e distante. Contemplam diferentes contextos e tópicos matemáticos, promovendo frequentemente o estabelecimento de conexões entre conceitos geométricos e numéricos. As representações visuais, principalmente pictóricas e concretas, têm também um papel fundamental nestas propostas, tendo em perspectiva a mobilização de múltiplas estratégias de generalização, tanto de natureza visual como não visual. Para evitar perdas supérfluas de tempo com cálculos demorados, e uma vez que não era um objectivo deste trabalho avaliar especificamente competências de cálculo, os alunos tiveram acesso à calculadora sempre que acharam necessário. A sequência de implementação das tarefas foi negociada com os professores que participaram no estudo, de forma a promover uma integração mais natural das mesmas no contexto da aula.

CAPÍTULO 8

TURMA A

Para melhor compreender o trabalho desenvolvido pela turma A, este capítulo descreve, características gerais da turma e o ambiente em que decorreu a experiência de ensino. Começa-se por salientar aspectos relativos ao contexto escolar e às vivências dos alunos, focando pontos considerados relevantes para a compreensão de determinadas reacções e do seu desempenho ao longo do estudo. Faz-se ainda referência aos resultados dos alunos na primeira aplicação do teste que são posteriormente analisados comparativamente com os resultados do pós-teste. São também descritos alguns dos episódios mais relevantes associados às sessões de exploração das tarefas, no decurso da experiência de ensino. Ao longo do capítulo são apresentadas evidências, com base no trabalho dos alunos, referentes às estratégias de generalização por eles utilizadas, dificuldades sentidas, assim como ao papel da visualização no seu desempenho.

8.1. Caracterização geral

Os alunos da turma A integravam uma escola do 1.º, 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, de uma freguesia do distrito de Viana do Castelo. A população afecta a esta freguesia, apresenta um nível socioeconómico médio/baixo e a maioria dos seus habitantes tem a sua actividade ligada ao sector primário, com destaque para a agricultura.

Esta turma era constituída por dezanove alunos, oito do sexo feminino e onze do sexo masculino. Grande parte dos alunos residia em zonas próximas da escola, deslocando-se, principalmente, a pé ou de autocarro para a escola. Os pais destes alunos apresentavam, maioritariamente, como habilitações académicas o 6.º ano de escolaridade, destacando-se apenas os pais de um aluno e a mãe de uma aluna que possuíam habilitação académica superior. As suas profissões integravam essencialmente o sector secundário.

No início do estudo, as idades destes alunos variavam entre os 10 e os 11 anos de idade, salientando-se uma aluna que tinha já 13 anos Dezoito destes alunos frequentaram a mesma turma no 5.º ano de escolaridade. No ano lectivo seguinte, período em que o estudo teve lugar, foi integrada uma nova aluna que tinha ficado retida no 6.º ano de escolaridade, sendo esta a segunda retenção que teve ao longo do seu percurso escolar. A aluna em questão apresentou níveis de assiduidade muito baixos e problemas de adaptação ao grupo, estando raramente presente nas sessões de exploração e discussão das tarefas. Por esta razão, optou-se por não se considerar o seu envolvimento no trabalho desenvolvido. À excepção desta aluna, todos frequentavam o 6.º ano pela primeira vez e nunca reprovaram nos anos anteriores. No final do 5.º ano de escolaridade, a turma apresentou um aproveitamento considerado satisfatório pelos seus professores, no entanto foi também salientado que se tratava de um grupo heterogéneo neste aspecto.

Esta turma era considerada por vezes agitada e conversadora, mas também muito dinâmica e competitiva. A maioria dos alunos revelava uma necessidade constante de validar os seus raciocínios e atribuía um peso considerável aos resultados obtidos em qualquer tipo de trabalho em que participavam. Era frequente levantarem-se a meio da aula para mostrar o seu trabalho aos professores ou mesmo chamarem insistentemente até lhes ser dada atenção. Apesar destas atitudes, havia espírito de entreajuda e de solidariedade dentro do grupo. Em geral, tinham uma óptima relação com todos os professores e reagiam quase sempre com motivação e empenho aos desafios que lhes eram propostos.

A opinião dos alunos relativamente à Matemática era muito divergente. Dez dos alunos desta turma consideravam-na a disciplina em que sentiam mais dificuldades e apenas quatro a destacavam como sendo a sua disciplina preferida. Quando questionados acerca do que mais gostavam de fazer nas aulas de Matemática, a maioria referiu o cálculo de expressões numéricas, tendo surgido justificações como "porque são fáceis" ou "porque é só fazer contas". Em contrapartida, destacaram "os problemas", a par com "a divisão" como o mais difícil da Matemática. Embora houvesse alguns alunos com muitas dificuldades nesta disciplina, todos mantinham uma óptima relação com a professora, que já os tinha acompanhado ao longo do 5.º ano de escolaridade. A professora de Matemática desempenhava ainda o cargo de Directora de Turma o que contribuiu para o estabelecimento de uma maior relação de proximidade. Havia um óptimo ambiente de sala de aula e um manifesto desejo de aprender, demonstrado por praticamente todos os alunos.

Aceitaram prontamente participar neste estudo, sendo notório pelas suas reacções, que era para eles um privilégio integrar um projecto desta natureza. O interesse e a curiosidade naturais desta turma conduziram a um questionamento constante, ao longo do estudo, no que referia aos resultados obtidos nas diferentes propostas de trabalho. Queriam estar informados acerca do seu desempenho, tanto nos testes como nas tarefas, questionando quer a professora, quer a investigadora acerca do que correu menos bem e de como deveriam ter procedido.

8.2. Desempenho dos alunos no pré-teste

A primeira aplicação do teste (Anexo A) teve lugar no início do ano lectivo e permitiu recolher, simultaneamente, dados de natureza quantitativa e qualitativa. Por um lado, através da utilização da escala de avaliação (Anexo B) foi possível classificar e analisar quantitativamente as respostas dos alunos em cada questão, obtendo assim indicadores do seu desempenho na resolução de problemas com padrões. No entanto, os resultados do teste foram ainda analisados numa perspectiva qualitativa, no sentido de identificar estratégias de generalização utilizadas por estes alunos, dificuldades evidenciadas, erros cometidos na resolução das diferentes questões, bem como a influência da visualização no seu raciocínio. Deste modo, considera-se pertinente fazer a análise destes dados numa perspectiva integradora, conjugando as componentes quantitativa e qualitativa.

Na Tabela 6 apresentam-se os resultados globais dos alunos desta turma, na primeira aplicação do teste, no que respeita às classificações médias, bem como à identificação das classificações mínima e máxima, em cada uma das questões.

Tabela 6 - Resultados globais do pré-teste - Turma A

Questão	Média	Mínimo	Máximo
1.1	0,67	0	4
1.2	3,94	3	4
1.3	3,67	0	4
1.4	3,83	1	4
1.5	4,00	4	4
1.6	1,94	0	4
1.7	3,39	0	4
1.8	3,61	0	4
1.9	2,94	0	4
1.10	3,56	0	4
1.11	2,44	0	4
1.12	3,72	0	4
1.13	0,89	0	4
1.14	3,33	0	4
1.15	1,06	0	4
1.16	3,56	0	4
2.1	1,50	0	4

2.2	0,72	0	4
2.3	0,11	0	1
3.1	1,44	0	4
3.2	1,00	0	2

No teste é possível identificar três tarefas distintas, nomeadamente, uma série de questões nas quais os alunos deveriam continuar sequências de vários tipos, seguidas de dois problemas envolvendo generalização próxima e distante. Assim, optou-se por analisar os resultados obtidos pelos alunos em cada uma das tarefas do teste (Tabela 6), relacionando-os com: o tipo de estratégias utilizadas; questões em que evidenciaram maiores dificuldades; e o papel da visualização no seu desempenho.

8.2.1. Tarefa 1 – Continuar sequências

Na primeira tarefa do teste pretendia-se que os alunos indicassem os dois termos seguintes de dezasseis sequências, de repetição e de crescimento, em diferentes contextos. Atendendo ao seu carácter fechado, estas questões não foram objecto de análise no que refere às estratégias de generalização utilizadas. No entanto, a partir do trabalho dos alunos, foi possível identificar algumas dificuldades bem como evidências acerca do impacto das representações visuais no seu desempenho.

Nos padrões de crescimento cada elemento da sequência está relacionado com o termo que o precede. Neste sentido, este tipo de padrões constituem um passo fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico, conduzindo a representações de generalizações usando variáveis. Os resultados apresentados na Tabela 6 revelam que os alunos têm uma maior taxa de sucesso nos padrões de repetição (questões *1.7*, *1.10* e *1.16*) do que nos padrões de crescimento. Este facto pode evidenciar uma maior experiência com o primeiro tipo de padrões ou então que o segundo tipo é cognitivamente mais complexo. Trata-se de uma questão pertinente uma vez que os padrões de crescimento são tradicionalmente usados para estabelecer a ponte entre a aritmética e a álgebra.

Destacam-se alguns casos em que, embora não se pretendesse sugerir essa regra, o padrão foi interpretado pelos alunos como sendo de repetição, tanto em sequências visuais como não visuais. Esta situação verificou-se de forma mais frequente na questão *1.15*, na qual vários alunos voltaram a desenhar um triângulo e um quadrado em vez de aumentarem o número de lados dos polígonos seguintes. Registaram-se ainda outros casos em que, em vez de continuarem a lei de formação identificada nos primeiros termos, repetiram a variação para determinar os termos seguintes. A sequência dos quadrados perfeitos, representada na questão *1.6*, constitui um exemplo claro desta interpretação por parte dos alunos. Tendo concluído que a variação entre termos consecutivos era +3, +5, +7, para determinar os dois termos seguintes, repetiram essa variação fazendo +3 e +5, obtendo assim os valores 19 e 24, em vez de 25 e 36, como era expectável.

Analisando a Tabela 6, verifica-se que, em média, os alunos tiveram um melhor desempenho nas questões que envolviam padrões de tipo não visual. Os piores resultados registaram-se, maioritariamente, no prolongamento de sequências com estrutura visual (questões *1.1*, *1.13* e *1.15*), destacando-se apenas uma de tipo numérico (questão *1.6*). Na sequência dos números triangulares (questão *1.1*), vários alunos sentiram dificuldades na representação da distribuição dos pontos que constituíam cada triângulo. Na sequência dos *Z's* (questão *1.13*) o principal entrave relacionou-se com a variação bidimensional de cada figura.

8.2.2. Tarefa 2 – Problema das missangas

A segunda tarefa do teste tinha subjacente um padrão linear crescente, sendo apresentada no enunciado a representação visual dos dois primeiros termos da sequência, um colar com uma flor e um colar com duas flores, respectivamente. As questões formuladas neste problema promovem tanto a generalização próxima (questões *2.1* e *2.2*) como a generalização distante (questão *2.3*).

Na Tabela 7 são apresentadas as estratégias de generalização, aplicadas pelos alunos na resolução deste problema, tendo por base a categorização adoptada neste estudo. Os casos em que se verificou a ausência de resposta ou a utilização de um raciocínio imperceptível foram considerados não categorizáveis (NC).

Tabela 7 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma A no problema 2 do pré-teste

Questões	**C**	TU_1	TU_2	TU_3	**TU**	D_1	D_2	D_3	**D**	**E**	**TE**	NC
2.1	**4**	7	-	1	**8**	3	-	-	**3**	**-**	**-**	3
2.2	**2**	8	1	1	**10**	-	1	-	**1**	**-**	**-**	5
2.3	**-**	7	-	1	**8**	-	2	-	**2**	**-**	**-**	8

Alguns alunos recorreram a um desenho para resolver as duas primeiras questões deste problema, efectuando posteriormente a contagem do número de missangas de cada cor. Verifica-se, no entanto, que o número de alunos a utilizar esta estratégia diminuiu à medida que a ordem do termo aumentou, acabando mesmo por se anular na última questão.

A estratégia mais utilizada foi a termo unidade. Perante um padrão de tipo linear esta abordagem apresenta algumas limitações. Como tem por base um raciocínio proporcional, para que se adeqúe a este tipo de padrão é imperativo que se faça um ajuste do resultado, depois de serem considerados múltiplos de determinados termos da sequência. Neste sentido, conclui-se que houve uma utilização indevida da proporcionalidade directa ao serem aplicadas estratégias como TU_1 e TU_2. Veja-se, por exemplo, a resolução das questões *2.1* e *2.2*, apresentadas por dois alunos que utilizaram respectivamente cada uma das estratégias anteriores (Figuras 32 e 33). Estes alunos não analisaram convenientemente a estrutura da sequência, encarando cada flor ou conjunto de flores como unidades disjuntas.

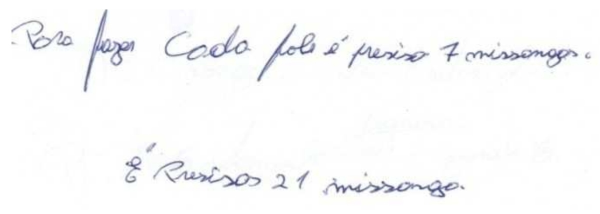


Figura 32 - Resolução da questão *2.1* do teste utilizando TU_1 – Turma A

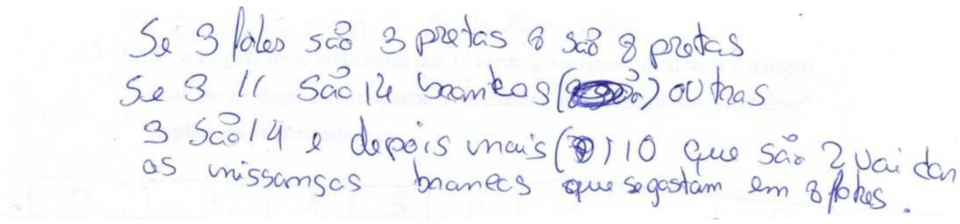


Figura 33 - Resolução da questão *2.2* do teste utilizando TU_2 – Turma A

Apesar da forma como registou os cálculos efectuados, destaca-se um aluno que, tendo utilizado a proporcionalidade directa, ajustou o resultado obtido (TU_3), subtraindo o número de missangas centrais que tinham sido contadas mais do que uma vez (Figura 34).

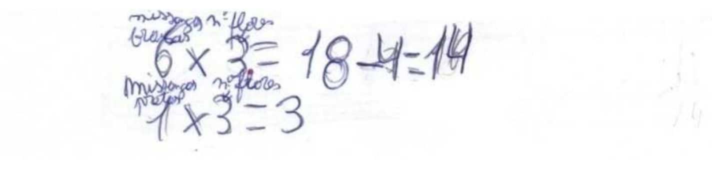


Figura 34 - Resolução da questão *2.1* do teste utilizando TU_3 – Turma A

Na literatura (e.g. Lannin, Barker & Townsend, 2006; Noss, Healy & Hoyles, 1997; Orton & Orton, 1999) é frequentemente referido que este tipo de tarefas potencia a utilização do raciocínio recursivo. Curiosamente não foi o que se passou nesta turma. A estratégia diferença, nas diferentes categorias, não foi uma abordagem muito comum. Os alunos que aplicaram a estratégia recursiva (D_1) na resolução da primeira questão foram bem sucedidos, descobrindo que cada flor acrescentada contribuía com um missanga preta e quatro brancas. Nas questões seguintes, com o aumento da ordem do termo pretendido, esta estratégia deixou de ser utilizada pelos alunos que optaram pela estratégia D_2 (Figura 35). Neste caso, tratando-se de um padrão linear, depois de considerar múltiplos da diferença entre termos consecutivos, é necessário efectuar um ajuste do resultado para que a resposta esteja correcta, o que não aconteceu.

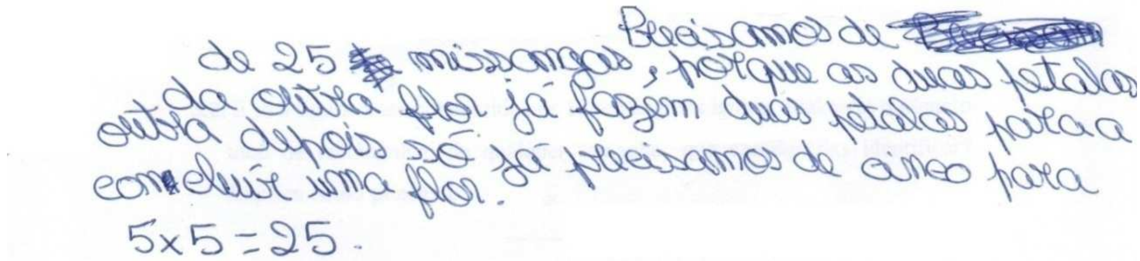


Figura 35 - Resolução da questão *2.2* do teste utilizando D_2 – Turma A

Apesar de terem sido utilizadas diversas estratégias na resolução deste problema, destaca-se a ausência das estratégias explícita e tentativa e erro. Tratando-se de figuras transparentes (Sasman, Olivier & Linchevski, 1999) era expectável que, pelo menos alguns alunos, conseguissem identificar uma regra que relacionasse de forma imediata o número de flores com o número de missangas de cada cor, aplicando assim uma estratégia explícita, o que não sucedeu.

Apesar de o problema ter uma forte componente visual, ao observar o número de respostas por categoria, na Tabela 7, verifica-se que os alunos privilegiaram claramente estratégias de natureza não visual (TU_1, TU_2, D_1 e D_2). Para além de analisar as preferências dos alunos, no que refere ao tipo de raciocínio utilizado, torna-se também pertinente estudar a adequação de cada uma das abordagens na resolução do problema (Figura 36).

	Estratégias visuais (%)				Estratégias não visuais (%)				
	C	TU_3	D_3	E	TU_1	TU_2	D_1	D_2	TE
2.1	100	100	-	-	0	-	100	-	-
2.2	50	0	-	-	0	0	-	0	-
2.3	-	0	-	-	0	-	-	0	-

Figura 36 - Eficácia de cada estratégia na resolução do problema 2 – Turma A

As estratégias visuais aplicadas pelos alunos revelaram-se úteis na resolução de questões de generalização próxima. No caso da contagem, à medida que o número de flores ia aumentando, a representação visual tornava-se cada vez mais exaustiva e complexa, resultando por vezes em desenhos incorrectos ou contagens erradas. O único aluno a recorrer à estratégia TU_3 fê-lo de forma adequada na primeira questão, mas o aumento do número de flores nas questões seguintes, fez com que calculasse erradamente o número de sobreposições. Das estratégias não visuais, apenas a recursiva se adequou a este contexto mas, tal como a contagem, revela-se um processo exaustivo quando a ordem do termo pretendido se vai tornando mais distante.

Como se pode verificar, os alunos sentiram muitas dificuldades na resolução deste problema, o que se traduziu numa taxa de insucesso bastante elevada (Tabela 6). Estas dificuldades foram gradualmente aumentando à medida que se caminhava para a generalização distante. O facto de a maioria dos alunos terem adoptado uma abordagem numérica, manipulando números sem lhes atribuir significado, pode de alguma forma fundamentar determinadas dificuldades e erros cometidos, nomeadamente a aplicação indevida da proporcionalidade directa e a dificuldade em generalizar o padrão.

8.2.3. Tarefa 3 – Problema dos rectângulos

O nível de sucesso atingido pelos alunos na resolução desta tarefa foi muito baixo (Tabela 6), possivelmente por encontrarem dificuldades em traduzir para números o contexto apresentado, tal como tinham feito no problema anterior. Este facto é fundamentado pela predominância da estratégia contagem nas duas questões deste problema (Tabela 8).

Tabela 8 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma A no problema 3 do pré-teste

Questões	**C**	TU_1	TU_2	TU_3	**TU**	D_1	D_2	D_3	**D**	**E**	**TE**	NC
3.1	**16**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	2
3.2	**13**	2	-	-	**2**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	3

Em geral, na aplicação desta estratégia, os alunos delinearam, na figura fornecida ou desenhada, os rectângulos de diferentes dimensões contando-os um a um. Alguns alunos identificaram vários rectângulos mas, como não utilizaram um raciocínio organizado, encontraram em geral menos casos do que seria de esperar. A maioria identificou apenas os rectângulos de menor dimensão e o de maior dimensão, provavelmente influenciados pelo exemplo apresentado no enunciado do teste.

Contrariamente ao que sucedeu na primeira questão desta tarefa, na segunda a figura não era fornecida, contribuindo para que a maioria dos alunos optasse pelo recurso a um suporte visual para efectuar a contagem dos rectângulos. Mas, mesmo tendo por base a representação dos rectângulos, não conseguiram, em qualquer uma das questões, identificar o padrão que permitia determinar o número de rectângulos, o que se deve em grande parte à utilização de estratégias de resolução desadequadas.

	Estratégias visuais (%)				Estratégias não visuais (%)				
	C	TU_3	D_3	E	TU_1	TU_2	D_1	D_2	TE
3.1	6	-	-	-	-	-	-	-	-
3.2	0	-	-	-	0	-	-	-	-

Figura 37 - Eficácia de cada estratégia na resolução do problema 3 – Turma A

Nesta tarefa os alunos privilegiaram estratégias visuais, nomeadamente a contagem. Apenas um aluno conseguiu resolver correctamente a primeira questão usando esta abordagem mas, como não identificou uma regra ou uma forma de contagem organizada, na questão seguinte já não foi bem sucedido. Neste caso, a contagem directa do número de rectângulos de diferentes dimensões torna-se um processo exaustivo e confuso. Destacam-se ainda dois alunos que concluíram que, se o número de rectângulos unitários duplica (questão *3.2*) então o número total de rectângulos varia da mesma forma, tendo aplicando erradamente a proporcionalidade directa.

8.2.4. Síntese dos resultados do pré-teste

A análise dos resultados da primeira aplicação do teste (Tabela 6) revela que os alunos foram mais bem sucedidos na continuação de sequências (questão *1*) do que na resolução de problemas contextualizados, envolvendo generalização próxima e distante. Esta situação poderá estar relacionada com o facto de as tarefas de continuar ou completar sequências serem mais frequentes nas aulas de Matemática do que os problemas apresentados nas duas questões seguintes. No entanto, destaca-se, na resolução da primeira questão, que os alunos apresentam maiores dificuldades na exploração de padrões de crescimento do que de repetição e também em continuar sequências de estrutura visual, o que pode indicar que as capacidades numéricas superam as espaciais ou que a instrução a que estiveram expostos não privilegiou a componente visual.

Nas duas últimas tarefas do teste os níveis de sucesso foram baixos, diminuindo gradualmente à medida que se avançava para a generalização distante. Este insucesso deve-se essencialmente à utilização de estratégias de generalização desadequadas. No âmbito das estratégias não visuais, verificou-se que, a manipulação de números de forma descontextualizada, conduziu muitos alunos à aplicação indevida da proporcionalidade directa e da diferença entre termos consecutivos. No caso das estratégias visuais, em particular a contagem, apesar de terem sido úteis aos alunos na generalização próxima, não contribuíram para a identificação da estrutura do padrão.

Destaca-se a ausência da estratégia explícita, de extrema utilidade especialmente na generalização distante. Nas tarefas *2* e *3*, os alunos não foram capazes de identificar uma regra que relacionasse directamente as variáveis dependente e independente. Pensando que na segunda tarefa os alunos estavam perante figuras transparentes, através da representação visual dos dois primeiros termos da sequência, este facto pode revelar que não estão sensibilizados para a percepção de relações de tipo visual.

8.3. A exploração das tarefas

Nestas sessões os alunos exploraram as tarefas em pares, metodologia que não era utilizada de forma frequente nas aulas de Matemática apesar de estarem dispostos dois a dois, no entanto foram gradualmente interiorizando hábitos de trabalho colaborativo, ao longo da experiência de ensino. Nesta secção é feita uma análise do trabalho desenvolvido pelos alunos desta turma, apresentando-se uma descrição detalhada de alguns dos episódios mais relevantes em cada tarefa.

8.3.1. Tarefa 1 - Os lembretes da Joana

A primeira tarefa, *Os lembretes da Joana* (Anexo C), foi realizada em Outubro de 2006, numa aula de Matemática de 90 minutos. Após a leitura da tarefa e os devidos esclarecimentos acerca do trabalho a desenvolver, os alunos iniciaram a sua resolução com bastante entusiasmo. Como se tratava da primeira tarefa pretendia-se que ficasse claro que o raciocínio teria de estar explícito na folha de resposta e que, para isso, poderiam recorrer a várias formas de representação, desde cálculos, a palavras ou desenhos.

O acompanhamento directo do trabalho dos alunos, durante a sessão, tornou possível a identificação de algumas dificuldades. Em geral, revelaram uma certa resistência na fundamentação do seu raciocínio. Nas questões iniciais da tarefa grande parte dos grupos tendia a apresentar apenas a solução sem qualquer tipo de argumentação. Insistiu-se então novamente no registo de todos os procedimentos que os conduziram à obtenção da resposta ao problema.

A referência ao desenho, como uma das possíveis formas de argumentação, suscitou alguma estranheza na maioria dos alunos, dando assim indícios de não reconhecerem a validade desta abordagem. Em alguns casos foi mesmo possível verificar que o desenho era feito numa folha de rascunho mas não era registado na folha de resposta. Segundo a professora, esta reacção estaria relacionada com o tipo de trabalho desenvolvido nas aulas de Matemática, onde as representações de natureza visual eram pouco utilizadas.

> Professora: Eles estão habituados aos números… Usam quase sempre tabelas e listas para resolver os problemas. O desenho é uma coisa nova para eles. Não é habitual usarmos essas representações nas aulas, a não ser em alguns conceitos geométricos.

Na última questão da tarefa a ausência de um modelo visual criou um entrave à interpretação da situação problemática. Para ultrapassar esta dificuldade foi usado como referência o contexto inicial, no qual os cartões tinham formato rectangular, referindo-se que se tratava de um problema semelhante, apenas se estava a utilizar uma figura geométrica diferente, o triângulo.

> Investigadora: Esta questão em nada difere das anteriores […] Até aqui utilizaram cartões rectangulares, agora vão pensar no que acontecerá se os cartões forem triangulares.
> Miguel: Mas também estão ligados?
> Investigadora: Sim! Dois triângulos seguidos partilham um *pionés*.

Depois deste esclarecimento quase todos os grupos optaram por modelar a situação por intermédio de um desenho. Quando questionados acerca da razão pela qual recorreram a este tipo de representação alguns alunos referiram:

> Roberta: Para perceber melhor a pergunta. Sem o desenho é mais difícil.

Ana: Porque antes tinha os lembretes desenhados e aqui não… Assim vê-se melhor.

A análise das folhas de resolução dos alunos permitiu identificar uma diversidade de estratégias de resolução, nas diferentes questões desta tarefa. A Tabela 9 sintetiza o número de respostas por categoria e o número de respostas que não foi possível classificar (NC). A tabela supracitada permite ter uma visão global da frequência de utilização de cada estratégia bem como do contexto em que são aplicadas.

Tabela 9 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma A na Tarefa 1

Questões	***C***	TU_1	TU_2	TU_3	***TU***	D_1	D_2	D_3	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1	**5**	2	-	-	**2**	1	1	-	**2**	**-**	**-**	-
2	**-**	-	2	-	**2**	2	1	-	**3**	**4**	**-**	-
3	**-**	2	-	-	**2**	-	1	2	**3**	**4**	**-**	-
4.1	**7**	1	-	-	**1**	-	1	-	**1**	**-**	**-**	-
4.2	**1**	-	1	-	**1**	1	1	-	**2**	**5**	**-**	-
4.3	**-**	1	-	-	**1**	-	1	2	**3**	**4**	**-**	1

Pode-se verificar que nas questões de generalização próxima (*1* e *4.1*) os alunos recorreram às estratégias contagem, termo unidade e diferença, mas aquela que predominou foi a contagem do número de *pioneses*, tendo por base a representação visual dos termos pretendidos.

Nas questões de generalização distante (*2*; *3*; *4.2* e *4.3*) há indícios da utilização das estratégias contagem, termo unidade, diferença e explícita, embora a contagem seja quase inexistente, tendo sido aplicada apenas por um dos pares que desenhou os 35 lembretes triangulares. Perante a necessidade de generalizar para valores mais distantes, a maioria dos alunos optou pela aplicação de um método explícito, identificando uma regra que relacionasse a variável dependente com a independente, com base no contexto do problema. A observação do trabalho de cada um dos grupos durante exploração da tarefa, permitiu concluir que alguns grupos tentaram resolver a questão *2* por intermédio de um desenho, tal como já tinha sucedido na questão anterior, mas desistiram quase de imediato apercebendo-se da desadequação da contagem neste caso, já que se estava a revelar um processo exaustivo.

Nesta tarefa havia questões com a mesma estrutura que apenas diferiam no contexto, como é o caso das alíneas *1* e *4.1*; *2* e *4.2*; e ainda *3* e *4.3*. Os lembretes passavam de rectangulares a triangulares implicando alterações na distribuição dos *pioneses*. Analisando as respostas dadas nestas questões, conclui-se que a maioria dos grupos de trabalho manteve as estratégias de resolução utilizadas.

Na resolução desta tarefa, os alunos utilizaram abordagens diversificadas para descobrir termos mais distantes na sequência. Embora estas estratégias dessem lugar a diferentes expressões numéricas, todas resultaram do estabelecimento de generalizações de tipo construtivo (Figura 38). Para que fique mais claro, destaca-se que na terceira e a oitava expressões numéricas os alunos adicionaram a diferença entre termos consecutivos 34 vezes.

	Expressão numérica	Natureza da generalização	N.º de pares de alunos
Questão *2*	35×3+1	Construtiva	1
	34×3+4	Construtiva	3
	4+3+...+3	Construtiva	2
Questão *3*	(600–4)÷3+1	Construtiva	4
	600÷3–1	Construtiva	2
Questão *4.2*	35×2+1	Construtiva	2
	34×2+3	Construtiva	3
	3+2+...+2	Construtiva	1
Questão *4.3*	(600–3)÷2+1	Construtiva	3
	600÷2–1	Construtiva	2

Figura 38 - Natureza da generalização utilizada pelos alunos da turma A na Tarefa 1

Na Figura 38 apenas se apresentam as abordagens conducentes a respostas correctas, no entanto é igualmente fundamental analisar as estratégias que foram aplicadas de forma incorrecta. Tratando-se de um padrão de tipo linear, a proporcionalidade directa e a utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos, sem proceder a um ajuste do resultado, não se adequam a um padrão com esta estrutura. Destaca-se também, num caso, a utilização não inteiramente adequada da estratégia explícita, registando-se alguma confusão entre as variáveis envolvidas já que os alunos acabaram por juntar *pioneses* com lembretes, misturando valores representativos da variável independente e da variável dependente. A não atribuição de significado aos valores utilizados, dentro do contexto do problema, poderá ter estado na origem destes erros. Apesar de ter sucedido apenas num dos grupos de trabalho, é ainda relevante focar a utilização da contagem na resolução da questão *4.2*. Este par representou os 35 lembretes triangulares e os respectivos *pioneses* tendo contado erradamente o número total de *pioneses*. A situação descrita é um indicador de que esta estratégia não será a abordagem mais adequada quando se trata de resolver questões de generalização distante. Nestes casos, para além de constituir um processo exaustivo, se a contagem não é efectuada de forma organizada poderá conduzir os alunos a alguns erros, como não contar os elementos todos ou repetir elementos.

8.3.2. Tarefa 2 – *Piscinas*

Esta tarefa (Anexo D) foi implementada em Novembro de 2006, numa aula de Matemática de 90 minutos, embora a exploração da tarefa tivesse ocupado apenas 60 minutos dessa aula. Tal como na tarefa anterior, após ter sido fornecido o enunciado aos alunos, procedeu-se à leitura do mesmo. Houve necessidade de explicitar a notação utilizada para as dimensões da piscina, para que não restassem dúvidas do seu significado, tendo sido estabelecida a correspondência entre os valores 7×4 e a figura apresentada. No momento da leitura da primeira questão da tarefa, surgiram alguns comentários indicadores da possível construção de uma imagem mental.

> Aluno: Ah! Já sei...
> Aluno: Aumenta a parte de dentro.
> Professora: Não se precipitem. Estejam com atenção à leitura.
> Aluno: À volta vai ter 10 e 6 quadradinhos.

Antes de dar início à exploração da tarefa, vários alunos questionaram a professora e a investigadora quanto à possibilidade de utilizarem cores na sua resolução. A referência a azulejos de cores diferentes na construção das piscinas motivou esta questão.

> Ana: Podemos usar cores?
> Investigadora: Como assim?
> João: Para pintar os azulejos!
> Ana: Sim! São duas cores diferentes.

Esta proposta foi adoptada por alguns grupos que apresentaram nas suas resoluções modelos de piscinas, com os diferentes azulejos assinalados com as cores destacadas no enunciado. Posteriormente, determinados alunos, verificaram ainda a utilidade das cores para destacar a subdivisão dos azulejos em grupos que viriam a relacionar-se directamente com as expressões numéricas utilizadas.

A Tabela 10 permite ter uma ideia global das estratégias de generalização utilizadas pelos alunos na resolução desta tarefa.

Tabela 10 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma A na Tarefa 2

Questões	***C***	*TU₁*	*TU₂*	*TU₃*	***TU***	*D₁*	*D₂*	*D₃*	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1	**9**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	-
2.1	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**8**	**-**	1
2.2	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**8**	**-**	1
3	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**7**	2

Todos começaram por desenhar uma piscina de dimensões 10×6 efectuando posteriormente a contagem do número de azulejos de cada cor. Esta estratégia foi aplicada de forma adequada por todos os pares, não tendo havido registo de qualquer tipo de dificuldade em atingir a generalização próxima.

Ao aumentar significativamente as dimensões da piscina (questão *2*), os alunos aplicaram, na sua maioria, a estratégia explícita. Destaca-se apenas um par cuja resolução não foi categorizada, já que apresentaram uma série de cálculos sem sentido. Dos oito pares que utilizaram a estratégia explícita, dois evidenciaram dificuldades relacionadas com os conceitos geométricos de área e perímetro. No cálculo do número de azulejos azuis (questão *2.1*), um dos pares determinou a área ocupada pela piscina, fazendo 90×30, e outro par, apesar de ter utilizado uma representação visual, com os valores indicados na figura, apresentou o cálculo 90×28, subtraindo dois azulejos a apenas uma das dimensões da piscina, o que revela que os alunos não estabeleceram qualquer conexão entre os contextos visual e numérico. Estes mesmos dois pares voltaram a revelar dificuldades no cálculo do número de azulejos brancos, tendo adicionado o número de azulejos existentes em cada um dos lados da piscina, 30+90+30+90. Associaram o cálculo do número de azulejos existentes no bordo da piscina ao perímetro da mesma, negligenciando a contagem repetida dos azulejos posicionados nos cantos.

A questão *2* potenciou o aparecimento de uma diversidade de expressões numéricas, associadas ao cálculo do número de azulejos de cada cor. A Figura 39 permite analisar as diferentes possibilidades que emergiram do trabalho dos alunos, o número de pares que utilizaram cada uma das expressões descritas e, dependendo de como construíram a expressão numérica, o tipo de generalização que formularam.

	Expressão numérica	Natureza da generalização	N.º de pares de alunos
Questão *2.1*	88×28	Construtiva	7
	90×30–236	Desconstrutiva	1
Questão *2.2*	30×2+88×2	Construtiva	3
	90×2+28×2	Construtiva	2
	30+89+29+88	Construtiva	1
	30×2+90×2–4	Desconstrutiva	1

Figura 39 - Natureza da generalização utilizada pelos alunos da turma A na Tarefa 2

Considerando a ordem das alíneas na questão *2*, pedia-se que os alunos propusessem uma expressão numérica para o cálculo dos azulejos azuis e posteriormente uma expressão numérica para o cálculo dos azulejos brancos. Um dos pares seguiu o caminho inverso. Para chegarem à expressão numérica solicitada na questão *2.1*, começaram por determinar o número de azulejos brancos. A expressão proposta foi originada por uma generalização de natureza desconstrutiva, uma vez que calcularam o número total de azulejos existentes na piscina e subtraíram os azuis que tinham já sido contemplados nesta contagem. Verifica-se que a maioria dos alunos optou por expressões associadas a generalizações construtivas, tendo procedido à decomposição da figura em partes que não se sobrepõem.

A questão *3* foi aquela em que os alunos sentiram maiores dificuldades. Para além de se alterar a forma da piscina, a formulação da questão era diferente das anteriores. Vários pares solicitaram ajuda, referindo não estar a compreender o que se pretendia com o problema ou mesmo como o abordar. Tornou-se necessário reler a referida questão e fornecer algumas orientações, relembrando as condições do problema.

> Investigadora: Têm de imaginar que a empresa só tem 300 azulejos azuis para construir uma piscina. E esta é uma piscina especial. Porque será?
> João: É quadrada!
> Investigadora: Sim, mas segue as mesmas regras de construção de todas as outras piscinas.
> André: Quadrados azuis dentro e brancos à volta.
> Investigadora: Exactamente! [...] Agora devem pensar que o cliente quer a maior piscina que a empresa puder construir com os azulejos que tem.
> Cláudia: E como sabemos?
> Investigadora: Vamos lá pensar um bocadinho como será esta piscina!

Para determinar as dimensões do quadrado azul, alguns pares pensaram imediatamente no cálculo 300÷4, mostrando mais uma vez que os conceitos de área e perímetro não estão totalmente interiorizados. Nestes casos foi solicitada aos alunos a verificação dessa conjectura, pensando se, com um quadrado dessas dimensões, gastariam 300 azulejos. Ao determinarem a área constataram que algo estava errado já que ultrapassavam bastante o número pretendido. Foi então que, em alguns grupos, surgiu a ideia de experimentarem diferentes valores para as dimensões do quadrado azul.

Sete pares de alunos recorreram à tentativa e erro, para descobrir o maior quadrado azul que poderiam construir com 300 azulejos, usando para isso o conceito de área. Depois de encontrarem os valores pretendidos, três grupos recorreram a uma representação visual para calcularem o número de azulejos brancos e as dimensões da piscina, tendo utilizado o mesmo tipo de generalização que aplicaram na resolução da questão *2.2*. Os restantes quatro grupos não usaram qualquer modelo visual o que pode ter tido influência nas dificuldades apresentadas por dois deles. Num dos casos, os alunos limitaram-se a determinar os azulejos azuis e, no outro caso, para determinarem o número de azulejos brancos, apresentaram o cálculo 19×4, aplicando uma regra diferente da que tinham usado na questão *2.2*.

8.3.3. Tarefa 3 – Sequência de números

A tarefa *Sequência de números* (Anexo E) foi proposta numa aula de Estudo Acompanhado, em Janeiro de 2007, na qual estiveram presentes a professora de Matemática e o professor de Inglês. Este optou por assistir à aula, mas não teve intervenção directa na orientação do trabalho dos alunos. A resolução da tarefa ocupou os 90 minutos deste período lectivo e, apesar de não ter sido implementada na aula de Matemática, não se notou qualquer diferença no comportamento e no envolvimento dos alunos. Após a leitura da tarefa, iniciaram a sua exploração sem colocar qualquer dúvida.

Na primeira questão da tarefa solicita-se a continuação da sequência por mais duas linhas. Todos os pares resolveram esta questão correctamente e sem qualquer dificuldade. A maioria dos alunos optou por representar na sua folha de resposta a sequência desde o primeiro termo até ao termo pretendido, em alguns casos, limitaram-se a apresentar as duas linhas pedidas. Em qualquer uma destas situações foi utilizado um raciocínio recursivo (D_1), aplicado linearmente, ou seja, linha a linha. Apesar da possibilidade de continuarem a sequência com base nos padrões associados a cada coluna, todos os pares identificaram a diferença entre termos consecutivos dispostos por linha.

À medida que iniciaram a exploração da segunda questão, vários pares revelaram dificuldades na descrição da regra utilizada para continuar a sequência. A explicitação do raciocínio constituiu uma tarefa bastante complexa para os alunos desta turma, principalmente pela possibilidade de envolvimento da linguagem corrente, algo que não tinham por hábito fazer nas aulas de Matemática. Em alguns casos referiram mesmo "sei como é mas não sei explicar". Nesta fase, tornou-se oportuno relembrar que, para explicar como pensaram, podiam recorrer a vários tipos de representações, por exemplo cálculos, palavras ou desenhos, desde que clarificassem a forma como tinham procedido para acrescentar mais duas linhas à sequência. Apesar destas orientações, nenhum grupo conseguiu descrever de forma clara a regra identificada. Além de não apresentarem um discurso fluente, limitaram-se a sublinhar algumas características soltas. Na maioria das respostas há referências à disposição visual dos números. Em alguns casos foram utilizados diagramas com setas, indicando o sentido de crescimento da sequência, complementados pela indicação de características como "mantém-se a ordem dos números" ou "tem quatro números em cada linha". Houve ainda alunos que, no seu trabalho, privilegiaram a linguagem corrente tendo utilizado expressões que também destacaram o arranjo da sequência: "da direita para a esquerda depois de acabar a linha pomos o próximo número na coluna anterior. Da esquerda para a direita depois de ter acabado a linha pomos o número na coluna seguinte"; "os números não estão alinhados, deixa-se sempre um espaço em branco". Ao analisar as respostas dos vários pares notou-se ainda que alguns centraram a sua descrição em casos particulares, utilizando como referência números específicos da sequência para explicitar a regra. Por exemplo, um dos pares escreveu: "a 1ª linha foi da direita para a esquerda e não pusemos o 1.º número debaixo do 20, foi debaixo do 19. Começamos no 21 e acabamos no 24. Na 2ª linha fizemos da esquerda para a direita e não pusemos o primeiro número debaixo do 24, foi debaixo do 23. Começamos no 25 e acabamos no 28". Este tipo de fundamentação enquadra-se num nível elementar de generalização que Radford (2008) classifica de factual.

À semelhança da questão *2*, a terceira questão também levantou algumas dúvidas relacionadas com a interpretação do enunciado. Investigar relações entre os números era algo um pouco vago para os alunos que começaram a questionar o objectivo da pergunta. Em geral, a sua reacção ao ler esta questão passava por perguntar "O que é para fazer aqui?". Houve então necessidade de clarificar o enunciado, promovendo uma discussão em grande grupo, para que todos os alunos pudessem ver as suas dúvidas esclarecidas.

> Investigadora: Têm aí uma sequência com vários números [...] Já tinham visto esta sequência?
> Alunos: Não!
> João: É 1, 2, 3, 4, 5, ... Mas está assim [faz um gesto em zigue-zague].
> Investigadora: Então é uma sequência especial... diferente! Aqui pretende-se que olhem atentamente para a sequência e descubram relações especiais entre os números.
> Margarida: Relações especiais?!?
> Investigadora: Sim! A ideia é encontrar relações entre os números que se vão mantendo ao longo da sequência.

Após este esclarecimento, os alunos retomaram o trabalho e começaram gradualmente a registar as suas descobertas, tendo identificado diversos padrões. Nesta fase, centraram-se mais nas relações existentes entre os números dispostos por coluna. Verificaram que na sequência existem alternadamente colunas constituídas apenas por números pares (1ª, 3ª e 5ª) e outras por números ímpares (2ª e 4ª). Outra constatação que a maioria dos grupos fez incidiu na identificação da diferença entre termos consecutivos de cada uma das cinco colunas: na primeira e na quinta colunas os números variam de 8 em 8 unidades; na terceira coluna a diferença entre os números é de 4 unidades; já na segunda coluna observaram que a diferença entre termos consecutivos não é sempre igual, começando por adicionar 6 unidades e depois 2; e na quarta coluna acontece algo semelhante, embora se inverta a ordem, adicionando-se primeiro 2 unidades e só depois 6. Em casos pontuais, foram identificadas relações numéricas associadas às linhas da sequência, tais como: "em cada linha há 4 números"; em todas as linhas os números estão representados de 1 em 1"; "nas linhas ímpares os números estão por ordem crescente e nas pares estão por ordem decrescente". As diagonais também foram referidas por dois pares de alunos. Observaram que os números dispostos na diagonal, entre a segunda e quarta colunas, diferem em 5 unidades, se a leitura for feita da esquerda para a direita, e diferem em 3 unidades, se a leitura for feita no sentido inverso.

Apesar de terem sido identificadas várias relações entre os números, distribuídos pelas linhas, colunas e diagonais, nenhum grupo fez referência à existência de múltiplos. Na base das suas observações esteve maioritariamente um raciocínio de tipo aditivo.

Para localizar o número 40 na sequência (questão *4*), a maioria dos grupos utilizou o raciocínio recursivo (D_1), continuando a sequência linha a linha até obter 40. Um dos pares usou a estratégia recursiva (D_1) conjugada com uma abordagem explícita. Centraram-se apenas na primeira coluna, na qual identificaram os múltiplos de 8, e prolongaram a sequência, parando no número pretendido. Houve apenas um caso em que a abordagem não foi recursiva. Este grupo optou por aplicar também duas estratégias, termo unidade (TU_1) para determinar a linha e explícita para a coluna. Concluíram que, se 20 está na 5ª linha então 40, que é o dobro, estará na 10ª linha e ainda que o número 40 teria de figurar na 1ª coluna porque esta "começa em 8, vai de 8 em 8 e 8×5=40".

Na questão *5*, os alunos tinham de identificar a posição de dois números, 81 e 542. Quanto ao primeiro caso, apenas um par escreveu toda a sequência até atingir 81, usando a estratégia recursiva (D_1). Os restantes alunos a utilizar esta estratégia, conjugaram-na com uma abordagem explícita, limitando-se a prolongar a primeira coluna, adicionando 8 unidades a cada número, até atingir 80, tendo no final mudado de linha e de coluna para obter 81. À semelhança do que sucedeu na questão anterior, também aqui houve registo da aplicação das estratégias termo unidade e explícita, para determinar a linha e a coluna ocupadas pelo número 81. Sabendo que "40 está na 10ª linha e 10×2=20" então "80 está na 20ª linha e como se tem de mudar de linha desce uma e o 81 fica na 21ª", deste modo utilizaram a estratégia termo unidade, fazendo um ajuste no final tendo por base a disposição dos números na sequência (TU_3). A coluna foi determinada utilizando uma estratégia explícita, descobrindo o múltiplo de 8 mais próximo de 81, ou seja 80.

A localização do número 542 revelou-se extremamente complicada para estes alunos. A maioria não respondeu a esta questão. Dos três pares que a resolveram apenas um o fez de forma bem sucedida. Dois grupos começaram por utilizar a tentativa e erro, procurando múltiplos de 8 próximos de 542, mas de forma infrutífera. Apenas um par conseguiu chegar à solução, recorrendo a uma estratégia explícita seguida de um raciocínio de tipo recursivo (D_1). Ao usarem a divisão, concluíram que 536 era múltiplo de 8, descobrindo assim a linha e a coluna associadas a este número, a partir daí prolongaram a sequência a partir de 536 até obter 542.

Na Tabela 11 são apresentadas as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das questões *1*, *4* e *5*. Uma vez que na última questão da tarefa se solicita a localização de dois números, e para facilitar a consulta da Tabela 11, optou-se por subdividir a pergunta *5* em duas alíneas. Apesar de terem sido analisadas previamente, as questões *2* e *3* não foram incluídas nesta tabela, já que a sua estrutura não se adequa à categorização utilizada no estudo. Os casos em que os alunos aplicaram mais do que uma estratégia, na identificação da linha e da coluna, estão devidamente assinalados com os símbolos * e **. Na questão *4* um par usou a estratégia TU_1 juntamente com a estratégia explícita e outro par recorreu à estratégia recursiva e à explícita em simultâneo. Na questão *5.1* três pares aplicaram as estratégias TU_3 e explícita e quatro pares usaram simultaneamente a recursiva e a explícita. Por fim, na questão *5.2*, houve apenas um par que usou duas estratégias, a recursiva e a explícita.

Tabela 11 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma A na Tarefa 3

Questões	***C***	TU_1	TU_2	TU_3	***TU***	D_1	D_2	D_3	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1	-	-	-	-	-	9	-	-	**9**	-	-	-
4	-	1*	-	-	**1***	6+1**	-	-	**6+1****	**1*+1****	-	1
5.1	-		-	3*	**3***	1+4**	-	-	**1+4***	**3*+4****	-	1
5.2	-	-	-	-	-	1*	-	-	**1***	**1***	**2**	6

Verifica-se que, à medida que a ordem de grandeza do número pretendido aumenta, as dificuldades apresentadas pelos alunos são cada vez maiores. Como se pode observar, nesta tarefa a utilização da estratégia explícita foi quase inexistente, tendo sido maioritariamente privilegiadas estratégias adequadas à resolução de questões de generalização próxima como é o caso da estratégia recursiva.

8.3.4. Tarefa 4 – A Pizzaria Sole Mio

Esta tarefa (Anexo F) foi realizada no em Fevereiro de 2007, nos primeiros 60 minutos de uma aula de Matemática. Na meia hora seguinte, a professora decidiu explorar situações relacionadas com o cálculo de expressões numéricas. Seguindo o procedimento habitual destas sessões, após o fornecimento do enunciado da tarefa, procedeu-se à sua leitura de forma a discutir possíveis dúvidas de interpretação.

Antes da descrição das reacções dos alunos ao longo da resolução da tarefa, considera-se pertinente apresentar uma síntese das estratégias de generalização por eles utilizadas. A Tabela 12 não dispõe de informação relativa à questão *4.1* já que a sua estrutura não se enquadra na categorização adoptada neste trabalho. No entanto, as respostas dos alunos a esta questão são posteriormente objecto de análise.

Tabela 12 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma A na Tarefa 4

Questões	***C***	*TU₁*	*TU₂*	*TU₃*	***TU***	*D₁*	*D₂*	*D₃*	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1	**5**	-	-	-	**-**	3	-	-	**3**	**1**	**-**	-
2	**-**	-	-	-	**-**	2	-	1	**3**	**6**	**-**	-
3	**-**	-	-	-	**-**	2	1	1	**4**	**5**	**-**	-
4.2	**-**	-	-	-	**-**	2	-	-	**2**	**2**	**-**	5

Apesar de serem questões de natureza distinta, uma de generalização próxima e outra de generalização distante, as duas primeiras perguntas da tarefa foram resolvidas sem qualquer dificuldade. Na questão *1* surgiram várias estratégias, entre elas a contagem, a explícita e a diferença, em particular a estratégia recursiva (D_1). Alguns alunos representaram uma mesa com 10 pizzas e o respectivo número de pessoas, procedendo à contagem, outros preferiram construir uma tabela, com o número de pizzas e o número de pessoas, tendo identificado que a diferença entre termos consecutivos era de 2 unidades, e apenas um par descobriu uma relação imediata entre as duas variáveis referindo que tinham "10 pessoas de cada lado da mesa e 2 na ponta". Consultando a Tabela 12, verifica-se que na resolução da questão *2*, a contagem deixou de ser aplicada, aumentando o número de alunos que optaram pela estratégia explícita. Todos estes grupos identificaram a mesma regra para calcular o número de pessoas que estariam sentadas numa mesa com 31 pizzas, surgindo novamente argumentações como "31×2+2, corresponde às 31 pessoas que estavam sentadas nos lados e 2 que estavam sentadas nas pontas". A estratégia diferença voltou a ser utilizada pelos mesmos pares que já o tinham feito na questão anterior. Neste caso, dois grupos prolongaram a tabela até obter 31 pizzas, recorrendo à estratégia recursiva (D_1), o outro grupo optou por aplicar um raciocínio multiplicativo, através do cálculo de múltiplos da diferença, procedendo posteriormente a um ajuste do resultado (D_3). Este par contornou, deste modo, a morosidade da estratégia recursiva, concluindo que, se 10 pizzas correspondiam a 22 pessoas, então 31 pizzas corresponderiam a 22+20×2+2.

Ao longo da sessão, foi possível reparar que alguns pares sentiram dificuldades no primeiro contacto com a terceira questão da tarefa. Numa fase inicial, essas dificuldades manifestaram-se maioritariamente devido a problemas de interpretação do enunciado. Tendo fixado o número de convidados, negligenciaram que o João também deveria ser contabilizado. Perante este facto não estavam a conseguir resolver o problema para 57 pessoas.

Investigadora: Parece-me que estão a sentir algumas dificuldades com a terceira questão.
Alunos: Sim!
Investigadora: Então seria melhor lê-la novamente. Pode ser que ajude [relê o enunciado da questão *3*].
[silêncio]
Investigadora: Então quantas pessoas foram ao aniversário do João?
Alunos: Cinquenta e sete!
Investigadora: Então quantas pessoas irão ocupar a mesa?
Alunos: Cinquenta e sete!
Alunos: Cinquenta e oito!
Daniel: O João também conta!
Investigadora: Pois! Estavam a esquecer-se do João.

Depois deste esclarecimento, os alunos reiniciaram o seu trabalho, tendo daqui resultado diferentes tipos de abordagens. Os pares que recorreram à estratégia explícita chegaram a um resultado correcto, utilizando a mesma regra que identificaram na resolução das questões anteriores. Mostraram ser capazes de usar o raciocínio inverso, determinando, desta vez, a ordem ocupada pelo número 58. Os alunos que aplicaram a estratégia recursiva, nas questões *1* e *2*, tendo procedido à construção de uma tabela até ao 31.º termo, identificaram facilmente que o número 58 ocupava a 28ª posição na sequência. Destacam-se, no entanto, dois grupos que revelaram ainda dificuldades na resolução de problemas com esta estrutura. Em ambos os casos, houve um grande impacto da diferença entre termos consecutivos no seu raciocínio, embora de forma diferente. Um dos pares fez 58÷2=29, dividindo as 58 pessoas em dois grupos, mas não consideraram os elementos sentados nos topos da mesa e que partilham 1 pizza e por isso não fizeram qualquer ajuste (D_2). O outro par, apesar de ter feito um ajuste, não o efectuou correctamente retirando 2 unidades a 29 (D_3). Os erros cometidos por estes grupos podem estar relacionados com o facto de limitarem o seu trabalho a um contexto puramente numérico.

A questão *4* voltou a suscitar algumas dúvidas na turma, dando lugar a comentários como "o que é para fazer aqui?", "não estou a perceber" ou mesmo "não come igual quantidade?". Foi necessária uma nova intervenção, de forma a aconselhar os alunos a não se precipitarem e tentarem experimentar, verificando o que aconteceria. Alguns grupos começaram por desenhar as mesas de 8 e 10 lugares, tal como as que se apresentavam no enunciado, e procuraram subdividir as pizzas em várias partes, para proceder à sua distribuição pelas pessoas de cada mesa. Neste caso, a representação visual não foi útil aos alunos, já que todos optaram por abandonar esta abordagem por não conseguirem encontrar uma distribuição equitativa. Deste modo, a maioria dos grupos optou por uma abordagem numérica dividindo 3 por 8 e 4 por 10, efectuando posteriormente a comparação dos números obtidos. Apenas um par não apresentou resposta à questão *4.1*.

Na questão seguinte pretendia-se que os alunos conjecturassem acerca do que aconteceria, à quantidade de pizza destinada ao João, se o número de convidados aumentasse. Esta situação problemática foi seguramente aquela em que os alunos revelaram maiores dificuldades. Quatro grupos conseguiram concluir, através da utilização de sucessivos casos particulares, que "quanto mais pessoas o João convida mais pizza come". Dois desses pares utilizaram valores extraídos da tabela, construída na resolução das duas primeiras questões (D_1), e os outros dois pares aplicaram a regra descoberta (E) para determinar mais casos que lhes permitissem chegar a uma conclusão. Os restantes alunos apresentaram apenas uma resposta sem explicitar o seu raciocínio ou simplesmente não resolveram a questão.

Fazendo uma síntese do trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo desta tarefa há algumas situações que devem ser destacadas. No que respeita às estratégias utilizadas, todas foram aplicadas excepto a tentativa e erro e a termo unidade. O segundo caso pode relacionar-se com o tipo de números propostos no enunciado. Nenhum dos números, 10, 31 ou 58, era múltiplo dos termos apresentados, ou seja não eram apelativos no sentido multiplicativo, o que pode ter contribuído para que os alunos não utilizassem um raciocínio proporcional (Sasman, Olivier & Linchevski, 1999). Nas questões de generalização próxima e distante prevaleceram, respectivamente, as estratégias contagem e explícita. No entanto, salienta-se a utilização da estratégia recursiva (D_1), mesmo na descoberta de termos mais distantes, algo que não seria expectável em questões deste tipo. Tal como aconteceu em tarefas anteriores, estes alunos continuam a revelar algumas dificuldades ao nível da argumentação e na resolução de questões onde se pede a ordem ocupada por um determinado termo da sequência, nas quais aplicam estratégias que não são adequadas ao contexto. Nesta tarefa em particular, o conceito de divisão, subjacente às questões *4.1* e *4.2*, trouxe também dificuldades a alguns pares, que acabaram por não apresentar qualquer resolução ou então limitaram-se a registar uma resposta sem qualquer tipo de fundamentação.

Como se pode observar na Figura 40, o tipo de expressões apresentadas revela que os alunos recorreram apenas a generalizações de tipo construtivo, procedendo à decomposição da estrutura do padrão em partes disjuntas. Destaca-se que na terceira e a quinta expressões numéricas os alunos foram consecutivamente adicionando a diferença entre termos consecutivos, no primeiro caso até obter o número de pessoas correspondente a 31 pizzas e no segundo caso até encontrar 58 pessoas de forma a obter o número de pizzas.

	Expressão numérica	Natureza da generalização	N.º de pares de alunos
Questão *2*	31×2+2	Construtiva	6
	22+20×2+2	Construtiva	1
	8+2+...+2	Construtiva	2
Questão *3*	(58–2)÷2	Construtiva	5
	8+2+...+2	Construtiva	2

Figura 40 - Natureza da generalização utilizada pelos alunos da turma A na Tarefa 4

Salienta-se ainda o impacto das estratégias de natureza visual na obtenção de respostas correctas, como a contagem, a explícita e a utilização de múltiplos da diferença com ajuste contextual (D_3). No entanto, a visualização nem sempre actuou como um elemento facilitador do raciocínio. Esse facto tornou-se claro quando alguns alunos tentaram modelar a divisão, recorrendo a uma representação visual, e não foram capazes de prosseguir com esta linha de raciocínio, tendo desistido quase de imediato.

8.3.5. Tarefa 5 – *Dobragens*

Esta tarefa (Anexo G) foi proposta aos alunos em Março de 2007, nos primeiros 60 minutos de uma aula de Matemática. A professora aproveitou os restantes 30 minutos para fazer revisões para o teste que se realizaria na aula seguinte. Ao contrário das outras sessões, esta iniciou-se com alguma agitação, provavelmente por ser utilizado material concreto de apoio à tarefa. A distribuição das folhas de jornal, por cada um dos pares, suscitou inicialmente alguma estranheza e curiosidade e posteriormente alguma confusão. Os alunos começaram por fazer comentários como "uma folha de jornal?", "para que é isto stôra?", que evoluíram depois para a comparação do conteúdo das folhas: "que notícias tens?", "eu tenho futebol". Para iniciar a resolução da tarefa, houve necessidade de os acalmar, antes da leitura do enunciado, referindo que a folha de jornal era um material, como outro qualquer, que, neste caso, poderiam utilizar na exploração da tarefa.

Depois de lido o enunciado, que nesta fase não suscitou dúvidas, envolveram-se na exploração da tarefa, começando de imediato a manipular a folha de jornal. Foi notório o entusiasmo na maioria dos alunos, associado essencialmente à utilização de um material que nunca tinham usado nas aulas de Matemática.

Na primeira questão pedia-se que os alunos efectuassem uma previsão do que iria acontecer. Alguns grupos estavam tentados a abrir a folha antes de apresentar a sua conjectura. Foi então necessário neste momento alertar a turma para esse facto.

> Investigadora: Aqui [questão *1*] pede-se uma previsão. Sabem o que significa?
> Bruna: Temos que adivinhar. É isso stôra?
> Investigadora: Sim! E se têm de adivinhar não podem abrir a folha.
> Nuno: E como vamos saber?
> Investigadora: Têm de pensar [...] pensar no que está a acontecer à folha à medida que a vão dobrando a meio.
> Nuno: E depois podemos abrir?
> Investigadora: Claro! E aí podem verificar se a vossa previsão está correcta ou não.

A maioria dos alunos foi capaz de formular uma previsão correcta do número de partes iguais em que a folha ficaria dividida. Em alguns grupos, à medida que iam efectuando as dobragens, ouvia-se "assim temos 2 partes, assim fica com 4 partes". Notou-se que sentiram maiores dificuldades com a conjectura associada à terceira dobragem. Mas, após um período de reflexão, as ideias começaram a surgir: "se numa página temos 4 partes, dobrando outra vez é 4+4=8"; "ao dobrar a 1ª vez ficam 2 partes, ao dobrar a 2ª vez ficam 4 partes e na 3ª vez multiplicamos outra vez por 2 e dá 8 partes"; "de cada vez que dobramos o resultado duplica".

No entanto, dois grupos desta turma apresentaram uma resposta incorrecta, referindo que, ao abrir a folha, esta estaria dividida em 6 partes iguais. Aplicaram erradamente um raciocínio aditivo, concluindo que teriam, após três dobragens, 2+2+2 secções. Os alunos de um desses pares ficaram surpreendidos quando abriram a folha e verificaram que a sua previsão não estava de acordo com o que observavam no momento, tendo solicitado ajuda.

> David: Oh stôra isto não dá certo!
> Investigadora: O que é que não dá certo?
> Ana: Nós pensavamos que era 6.
> Investigadora: E não é?
> David: Não! Aqui [refere-se à folha de jornal] aparecem 8.

Investigadora: Não devem mudar a resposta que escreveram, porque foi a vossa previsão. Mas vamos pensar aqui entre nós porque é que deu uma coisa diferente. Vamos reiniciar a dobragem e em cada fase pensar no que está a acontecer.
Ana: [dobra uma vez a folha] Assim fica em 2 partes. [após dobrar a folha uma segunda vez] Assim já fica com 4 partes.
Investigadora: [depois da terceira dobragem] E agora?
David: Agora é mais difícil stôra!
Investigadora: Então até aqui tinham 4 partes. Dobraram mais uma vez a folha...
Ana: Ah! Corta a meio as partes que já estão. Dá 8.
David: Pois é!

No caso das sete dobragens (questão *2*), a estratégia mais utilizada foi a recursiva (D_1), através da qual descobriram que, à medida que iam dobrando a folha, o número de partes iguais em que esta ficaria dividida duplicava. Alguns grupos continuaram a recorrer à dobragem da folha para registar os primeiros casos, numa lista ou numa tabela, mas depois de identificarem a variação, libertaram-se do material e restringiram-se à relação numérica. Destacam-se dois pares de alunos que utilizaram uma estratégia diferente, a contagem. Com alguma dificuldade, dobraram a folha sete vezes. Ao abrirem novamente a folha de jornal repararam que ia ser difícil fazerem a contagem porque tinham muitas secções e as dobras não era completamente perceptíveis. Optaram então por fazer um desenho representativo da situação para não se enganarem na contagem (Figura 41). Subjacente a este raciocínio esteve o conceito de área, já que ao efectuar a contagem não o fizeram unitariamente, tendo optado por multiplicar comprimento e largura.

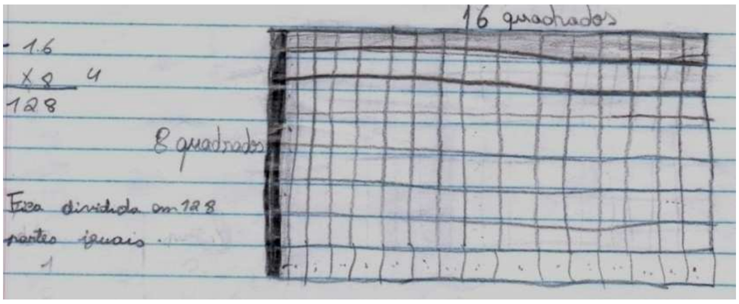


Figura 41 - Resolução da questão *2* da Tarefa 5 apresentada por um par de alunos – Turma A

A questão *3* foi a que suscitou maiores dificuldades aos alunos. Pretendia-se que identificassem uma regra que relacionasse directamente o número de dobragens com o número de partes iguais em que a folha ficaria dividida. A maioria dos grupos encontrou uma regra recursiva (D_1), referindo "multiplicamos sempre por 2" ou "a relação é vezes 2". Neste caso não estabeleceram qualquer relação entre as duas variáveis envolvidas, basearam-se apenas na variação ocorrida na variável dependente. Só dois pares apresentaram uma expressão que cumpria as condições do enunciado.

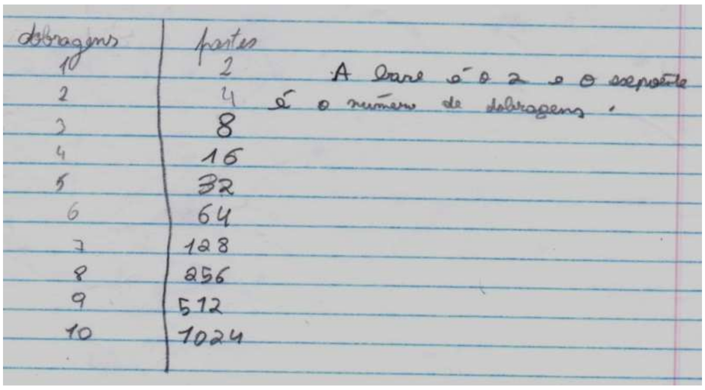


Figura 42 - Resolução da questão *3* da Tarefa 5 apresentada por um par de alunos – Turma A

Neste caso, deduziram a regra após a exploração dos valores registados na tabela. Fizeram uma leitura horizontal da mesma conseguindo, deste modo, relacionar as duas variáveis (Figura 42). O outro par, apesar de ter identificado uma regra similar, fundamentou de forma factual, tendo recorrido a casos particulares: “se estivermos na 3ª dobragem fazemos 2×2×2 ou 2^3. Se estivermos na 4ª dobragem fazemos 2×2×2×2 ou 2^4”.

Na quarta questão da tarefa, quase todos os grupos optaram por continuar a utilizar o raciocínio recursivo (D_1), que já tinham aplicado previamente, até identificarem o número de dobragens correspondentes a 1024 partes. Curiosamente, inclui-se neste leque um dos pares que na questão anterior identificou correctamente a relação entre as duas variáveis. No entanto, não foram capazes de a usar para resolver esta questão. O par que formulou a generalização factual, recorreu à regra descoberta para, por tentativa e erro, descobrir qual o expoente da potência de base 2 que corresponderia a 1024.

A última questão envolvia essencialmente o conceito de área e dependia dos resultados obtidos na resolução das duas primeiras questões da tarefa. Apenas um grupo não apresentou resposta. Os restantes não revelaram dificuldades, tendo, na sua maioria, optado por determinar a representação decimal da área, em cada um dos casos. As respostas a esta questão não foram contempladas na síntese apresentada na Tabela 13.

Tabela 13 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma A na Tarefa 5

Questões	***C***	TU_1	TU_2	TU_3	***TU***	D_1	D_2	D_3	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1	**6**	-	-	-	**-**	3	-	-	**3**	**-**	**-**	-
2	**2**	-	-	-	**-**	7	-	-	**7**	**-**	**-**	-
3	**-**	-	-	-	**-**	4	-	-	**4**	**2**	**-**	3
4	**-**	-	-	-	**-**	7	-	-	**7**	**-**	**1**	1

Esta tarefa apresenta algumas características diferentes das tarefas que foram propostas anteriormente. Para além de se tratar de um padrão exponencial, esta foi a primeira tarefa em que os alunos tiveram a oportunidade de utilizar material manipulável. À medida que iam progredindo na exploração de cada uma das questões, foram deixando de recorrer à folha de jornal, por um lado por descobrirem relações que lhes permitiam continuar sem aquele suporte ou por identificarem limitações no mesmo. No que respeita às dificuldades sentidas pela turma, destaca-se principalmente a questão *3*, tendo havido apenas dois grupos que conseguiram identificar uma relação entre as variáveis dependente e independente. Consultando a Tabela 13, verifica-se que, apesar de terem sido utilizadas estratégias diversificadas, na resolução das diferentes questões, predominou a estratégia recursiva, à excepção da generalização próxima onde a contagem foi privilegiada.

8.3.6. Tarefa 6 – *Sequência de losangos*

A tarefa (Anexo H) foi realizada em Abril de 2007, numa aula de Matemática de 90 minutos. Após a leitura do enunciado, os alunos não colocaram qualquer dúvida, iniciando de imediato a resolução da tarefa.

A maioria dos alunos começou por desenhar um losango de lado 4, de forma a dar resposta à primeira questão. Em alguns casos foram identificadas dificuldades na construção do polígono, especialmente na sua decomposição nas diferentes peças. No entanto, depois de algumas tentativas e, em certas situações, com recurso à régua, todos os pares que optaram por esta abordagem, conseguiram construir o losango pretendido. A representação visual do 4º termo da sequência deu posteriormente lugar à contagem do número total de peças que o compunham.

Nem todos os pares optaram por este tipo de abordagem na resolução da questão *1.1*. Três grupos recorreram, já nesta fase, a uma estratégia explícita. A observação das figuras representativas dos três primeiros termos, permitiu que os alunos identificassem uma regra, aplicável a todos os losangos da sequência e tendo por base o conceito de área. Como exemplo, apresenta-se a resposta de um desses pares, a Bruna e o Tiago: “ 4×4=16. Tem 16 peças porque no losango de lado 1 é 1×1, no de lado 2 é 2×2 e no de lado 3 é 3×3”.

Todos os alunos aplicaram uma estratégia explícita, no cálculo do número de peças necessárias à construção de um losango de lado 50 (questão *1.2*). Sem excepção, todos os pares descobriram que o produto *lado*×*lado* daria o número de peças gastas no polígono. Na resolução da segunda questão houve uma tendência generalizada para a utilização da tentativa e erro. Uma vez que, na questão anterior, a regra identificada tinha por base o conceito de área, dando assim lugar a uma expressão do 2º grau, para determinar o comprimento do lado de um losango com um dado número de peças, tornar-se-ia necessário aplicar a raiz quadrada, conceito que apenas se aborda no 7º ano de escolaridade. Para contornar esta dificuldade, optaram por testar diferentes valores, atribuídos ao lado do losango, até obter as 324 peças.

De uma forma geral, a questão *3* foi a que suscitou mais dúvidas. Soavam pela sala alguns comentários à medida que os diferentes pares iniciavam a exploração desta questão, tais como: “o que é para fazer aqui?”; “não estou a perceber nada disto”. Até que se proporcionou a oportunidade de dialogar com os alunos acerca das dificuldades que estavam a sentir.

> Daniel: Oh stôra, não estou a perceber nada da *3*!
> João: Eu também não!
> Investigadora: Vamos com calma. Não estão a perceber porquê?
> João: Faltam dados [...] acho.
> Investigadora: Achas que faltam dados João?
> João: Sim! Nesta não há figuras.
> Investigadora: E será preciso?
> Cláudia: Mas também não tem números stôra.
> Investigadora: Vocês têm razão. Esses elementos não são fornecidos, mas o enunciado fala-nos de losangos com características especiais.
> Daniel: Triplos!
> Investigadora: Triplos?!? Não é bem isso que diz. ‘Se o lado de um losango for o triplo de outro’ [lê o enunciado] Embora não vos sejam fornecidos números ou figuras particulares, vocês podem utilizar losangos que estejam nestas condições, em que um tem o lado com triplo do comprimento do outro.
> Nuno: E inventamos nós?
> Investigadora: Porque não? Desde que cumpram essa condição.

Depois deste esclarecimento, os alunos começaram por experimentar alguns casos particulares, tendo em vista a formulação de uma conjectura. A maioria dos grupos limitou-se a explorar apenas a relação entre os perímetros de dois losangos nas condições pedidas, ficando convencidos da validade da sua conjectura com base no estudo de um caso. Destacam-se somente três pares de alunos que recorreram à exploração de vários losangos para sustentar as regras encontradas (questões *3.1* e *3.2*). Salienta-se ainda que nem todos usaram o mesmo tipo de abordagem, alguns alunos recorreram a representações visuais dos losangos que escolheram e outros apresentaram apenas cálculos.

Na questão *3.1* houve apenas um grupo que não chegou a qualquer conclusão. Os restantes foram bem sucedidos na descoberta de uma regra, referindo, por exemplo, que: "o perímetro é o triplo"; "a regra é multiplicar por 3"; "os perímetros aumentam 3 vezes mais".

Na questão *3.2* alguns alunos arriscaram uma conjectura logo após a leitura do enunciado, referindo que a área também iria triplicar, à semelhança do perímetro, estabelecendo deste modo uma relação proporcional. No entanto, depois de experimentarem alguns casos, a previsão revelou-se falsa. Esta questão trouxe maiores dificuldades aos alunos do que a anterior, tendo havido apenas cinco grupos a identificar correctamente a relação entre as áreas dos losangos, referindo por exemplo: "a regra é que é maior 9 vezes"; "a área ficou 9 vezes maior"; "aumenta nove vezes mais"; "a regra é multiplicar por 9". Dos restantes quatro pares, dois ainda arriscaram formular uma conjectura. Um dos grupos concluiu apenas que "a área é cada vez maior", mas não identificaram a relação entre as áreas dos losangos estudados, e o outro grupo centrou-se em cada um dos losangos de forma isolada já que para este par "a regra é multiplicar por si mesmo".

Tabela 14 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma A na Tarefa 6

Questões	***C***	*TU*$_1$	*TU*$_2$	*TU*$_3$	***TU***	*D*$_1$	*D*$_2$	*D*$_3$	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1.1	**6**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**3**	**-**	-
1.2	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**9**	**-**	-
2	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**9**	-

A Tabela 14 sintetiza o trabalho desenvolvido pelos alunos na tarefa *Sequência de losangos*. Na resolução foram utilizadas diversas estratégias, no entanto destaca-se a ausência da diferença e da termo unidade. Uma das razões que poderá fundamentar esta situação prende-se com a forte componente visual associada a esta tarefa, através do envolvimento de conceitos geométricos como a área e o perímetro. Destaca-se ainda a utilização da estratégia explícita em questões de generalização próxima (questão *1.1*). Apesar de ainda prevalecerem, neste tipo de questões, estratégias que se enquadram numa generalização de natureza aritmética, como a contagem, nesta fase, alguns alunos, conseguiram descobrir uma relação directa entre as variáveis envolvidas, deduzindo generalizações de tipo construtivo.

8.3.7. Tarefa 7 – Cubos de chocolate

A tarefa *Cubos de chocolate* (Anexo I) foi a última implementada nesta turma e a sua exploração teve lugar em Maio de 2007, numa aula de Matemática de 90 minutos.

Quando os alunos avistaram as caixas com os cubos de encaixe instalou-se de imediato a confusão. Em geral, queriam saber se iriam usar o material e para que servia. Depois de ser confirmado que, nesta tarefa, utilizariam os cubos como suporte ao seu trabalho, reagiram com bastante entusiasmo, já que até ali não tinham tido oportunidade de recorrer a este tipo de material em aulas de Matemática.

Após a leitura da tarefa, nem todos os grupos aderiram de imediato à resolução da mesma. Nesta fase, os cubos de encaixe constituíram um elemento perturbador, pois alguns alunos estavam mais interessados na exploração livre do material, fazendo construções que nada tinham a ver com o problema proposto. De forma a direccionar os alunos para o objectivo da sessão, foi necessário estabelecer algumas regras, estipulando que naquela aula iriam utilizar o material na resolução da tarefa e que, no final da mesma, a Professora ficaria na posse dos cubos para voltarem a utilizar noutra ocasião.

Depois de restabelecida a normalidade, a turma iniciou a resolução da tarefa, no entanto o entusiasmo com o material não desapareceu. Numa fase inicial, vários pares estavam a desenvolver um trabalho individual, observando-se, em alguns casos, que cada aluno construía o seu cubo de aresta 3. Apesar desta situação, continuou a promover-se o diálogo entre os elementos de cada grupo, no sentido de deliberarem juntos a solução e a respectiva fundamentação. Outra situação que se destacou prende-se com a reacção da maioria dos alunos na escolha dos cubos usados nas primeiras construções. Tentando seguir as orientações do enunciado, queriam preencher o cubo usando apenas cubos unitários castanhos, o que causou alguns entraves porque não havia cubos dessa cor em número suficiente.

> Nuno: Oh stôra, queremos mais castanhos!
> Alexandre: [Levanta o dedo] Nós também!
> Investigadora: Mas não têm aí cubos na vossa mesa?
> Nuno: Sim! Mas não são castanhos.
> Investigadora: E porque é que querem cubos dessa cor?
> Nuno: Porque são de chocolate.
> Investigadora: Sabem que aqui não tenho cubos castanhos que cheguem para todos os grupos. Por isso devem trabalhar com os cubos que vos foram dados. A vossa imaginação também tem de funcionar. Imaginam que são de chocolate, mesmo não sendo castanhos.

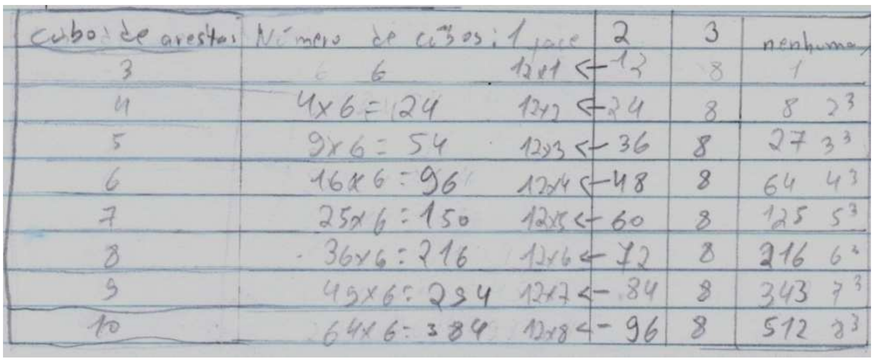
Mesmo assim, vários grupos construíram o cubo de aresta 3 usando cubos unitários castanhos na parte que supostamente iria ficar coberta de chocolate. Mas, nas questões seguintes, com o aumento do comprimento da aresta, deixaram de ter cubos suficientes para o fazer.

Na resolução da primeira questão, todos os alunos procederam à construção do cubo pretendido e contaram o número de cubos unitários com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate. Ao longo da sessão, foram identificadas algumas dificuldades neste processo de contagem. Uma dessas dificuldades relacionou-se com a manipulação do cubo. À medida que iam contando os elementos, iam rodando o cubo, acabando por repetir ou por não contar alguns dos cubos unitários. Deste modo, foi perceptível que as dificuldades ao nível da visualização espacial, traduzidas na forma como manipularam o material, condicionaram a contagem que estava a ser feita de forma aleatória e não organizada. Após a identificação desta situação, sugeriu-se aos alunos que mantivessem o cubo fixo, na mão ou em cima da mesa, de forma a facilitar a contagem. Ao analisar as respostas de cada um dos pares, destaca-se apenas um que contou erradamente o número de cubos unitários com 1 e 2 faces de chocolate, existentes num cubo de aresta 3.

Na questão *2*, os alunos voltaram a privilegiar a contagem como estratégia de generalização. Dos nove pares, destaca-se um que não chegou a uma resposta correcta, apresentando valores errados para o número de cubos unitários com 0 e 2 faces de chocolate, existentes num cubo de aresta 4. A maioria dos grupos optou pelo estudo de um único caso, o cubo de aresta 4, distinguindo-se apenas um par que investigou não só este caso mas também o do cubo de aresta 5. Foi interessante verificar que, para determinar o número de cubos unitários não visíveis, ou seja, aqueles que não tinham faces de chocolate, dois pares de alunos optaram por determinar o volume do cubo inicial e subtrair a esse valor o número de cubos unitários visíveis, em particular, os que apresentavam 1, 2 e 3 faces de chocolate. Há ainda outra situação digna de destaque, na resolução desta questão. A Ana e a Cláudia decidiram usar cores para identificar conjuntos de cubos com o mesmo número de faces de chocolate. As alunas encontraram assim uma estratégia que lhes facilitou a visualização e consequentemente a contagem.

> Investigadora: Construíram um cubo diferente. Tem muitas cores.
> Cláudia: É para se ver melhor stôra.
> Investigadora: Ver melhor como?
> Cláudia: Assim não nos enganamos a contar.

Numa primeira abordagem à terceira questão, grande parte dos alunos, tendo utilizado os modelos dos cubos nos casos anteriores, tentaram construir o cubo de aresta 10. Naturalmente, concluíram que não tinham cubos unitários suficientes para o fazer. Alguns alunos não foram capazes de se libertar da modelação e por essa razão não foram bem sucedidos na resolução desta questão. Três grupos não apresentaram qualquer resposta e dos restantes, quatro indicaram apenas que, num cubo de aresta 10, existiriam 8 cubos unitários com 3 faces de chocolate, mostrando-se incapazes de generalizar para os outros casos. O Miguel e o André foram um pouco mais longe e, para além de concluírem que os cubos com 3 faces de chocolate eram sempre 8, também referiram que "para saber quantos cubos de 1 face de chocolate existem é preciso saber quantas faces tem no meio de cada face do cubo e multiplicar por 6". Apesar de terem criado uma imagem mental correcta, relativa à regra que permitiria determinar o número de cubos unitários com 2 faces pintadas, não conseguiram aplicá-la ao caso particular do cubo de aresta 10, possivelmente por ausência de um suporte visual. Houve apenas um par que resolveu correctamente esta questão. A Ana e a Cláudia organizaram a informação, obtida nas questões anteriores, numa tabela (Figura 43) e conseguiram identificar relações explícitas para determinar o número de cubos unitários de cada tipo.



cubo de aresta	Número de cubos: 1 face	2	3	nenhuma
3	6	12x1 ← 12	8	1
4	4x6 = 24	12x2 ← 24	8	8 2^3
5	9x6 = 54	12x3 ← 36	8	27 3^3
6	16x6 = 96	12x4 ← 48	8	64 4^3
7	25x6 = 150	12x5 ← 60	8	125 5^3
8	36x6 = 216	12x6 ← 72	8	216 6^3
9	49x6 = 234	12x7 ← 84	8	343 7^3
10	64x6 = 384	12x8 ← 96	8	512 8^3

Figura 43 - Resolução da questão *3* da Tarefa 7 apresentada por um par de alunos – Turma A

A Tabela 15 destaca as estratégias de generalização usadas pelos alunos desta turma na resolução da tarefa *Cubos de chocolate*. Nas questões de generalização próxima todos recorreram à contagem, tendo por base os modelos dos cubos por eles construídos. Esta estratégia nem sempre se revelou eficaz, tendo-se registado casos em que os alunos não conseguiram chegar à resposta pretendida por utilizarem processos de contagem desorganizados. Na generalização distante, prevaleceu a estratégia explícita, mas apenas um par foi capaz de a utilizar na formulação de regras para todos os casos propostos.

Tabela 15 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma A na Tarefa 7

Questões	***C***	TU_1	TU_2	TU_3	***TU***	D_1	D_2	D_3	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1	**9**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	-
2	**9**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	-
3	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**5**	**-**	4

As dificuldades sentidas pelos alunos na resolução desta tarefa já eram de certa forma esperadas, principalmente ao nível da generalização distante. Revelaram que as capacidades relacionadas com a visualização espacial ainda não estão bem desenvolvidas e este facto foi mais notório quando não tinham o suporte concreto a que recorrer.

8.3.8. Síntese da exploração das tarefas

De uma forma geral os alunos desta turma mostraram-se interessados e motivados ao longo das sessões de exploração das tarefas. Referiram que as tarefas que mais gostaram foram aquelas em que tiveram oportunidade de usar material concreto, nomeadamente, *Dobragens* e *Cubos de chocolate*, no entanto nenhuma delas se destaca como a tarefa em que a turma registou melhor desempenho. Foi na tarefa *Sequência de losangos* que surgiram os melhores resultados, na qual foram maioritariamente utilizadas estratégias adequadas aos diferentes níveis de generalização.

Nas sessões de discussão, os alunos revelaram o mesmo nível de envolvimento, embora tivessem decorrido num ambiente de maior agitação. Foi-lhes dada a oportunidade de apresentarem as suas propostas de resolução e discutirem abordagens alternativas. Destaca-se também a importância da discussão e compreensão da desadequação de certas estratégias de generalização em determinados contextos.

As tarefas propostas neste estudo foram formuladas com a intenção, não só de promover a generalização, mas simultaneamente potenciar a utilização de múltiplas estratégias que permitissem atingir esse objectivo. Após a exploração de cada tarefa, procedeu-se à categorização das estratégias de generalização adoptadas pelos alunos e à construção de tabelas onde se apresentava o número de vezes que dada estratégia tinha sido utilizada e em que contexto, generalização próxima ou distante. De forma a ter uma perspectiva global, optou-se por concentrar essa informação na Tabela 16, onde se pode ver a percentagem de utilização de cada uma das estratégias nas tarefas propostas.

Tabela 16 - Percentagem de utilização das estratégias por tarefa – Turma A

Tarefa	C	TU_1	TU_2	TU_3	D_1	D_2	D_3	E	TE	NC
Os lembretes da Joana	24	11	6	-	7	11	7	31	-	3
Piscinas	25	-	-	-	-	-	-	44	19	12
Sequência de números	-	2	-	5	54	-	-	12	5	22
A Pizzaria Sole Mio	14	-	-	-	25	3	6	39	-	13
Dobragens	22	-	-	-	58	-	-	6	3	11
Sequência de losangos	22	-	-	-	-	-	-	44	33	1
Cubos de chocolate	67	-	-	-	-	-	-	19	-	14

Ao longo da experiência de ensino, todas as estratégias destacadas na categorização adoptada neste estudo foram utilizadas, nomeadamente: contagem, termo unidade, diferença, explícita e tentativa e erro. Considerando estas categorias, as tarefas *Os lembretes da Joana*, *Sequência de números* e *Dobragens* foram as que deram lugar a uma maior diversidade de estratégias, tendo sido utilizadas quatro dos cinco grupos de estratégias. Na primeira tarefa mencionada não foi aplicada a tentativa e erro, na segunda não houve indícios da utilização da contagem e na última não surgiu a estratégia termo unidade. É também pertinente realçar a predominância de determinadas estratégias em algumas tarefas. A tarefa *Piscinas* potenciou a utilização da estratégia explícita, levando a maior parte dos alunos a estabelecer relações directas entre as dimensões das piscinas e o número de azulejos de cada cor. Na tarefa *Sequência de números*, destaca-se a estratégia diferença, em particular a recursiva, situação possivelmente associada à componente numérica da sequência. O mesmo sucedeu na tarefa *Dobragens* na qual os alunos privilegiaram o raciocínio recursivo, quer na generalização próxima quer distante. Por último, na tarefa *Cubos de chocolate* registou-se uma preferência acentuada pela contagem, relacionada com o facto de a maior parte dos alunos não serem capazes de se abstrair da utilização do material concreto, descobrindo relações entre as dimensões do cubo e o número de cubos unitários com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate.

A Tabela 16 permite ainda ter uma percepção da frequência de utilização de cada estratégia, nas sete tarefas implementadas. A estratégia explícita foi aplicada em todas as tarefas, maioritariamente na resolução de questões de generalização distante. A contagem também foi uma estratégia muito utilizada, salientando-se a sua ausência em apenas uma tarefa, *Sequência de números*. Apesar de existir uma componente visual nesta tarefa, traduzida no arranjo dos números ao longo da sequência, os alunos privilegiaram o contexto numérico e por essa razão não recorreram à contagem. Esta estratégia foi quase sempre utilizada na generalização próxima. O recurso à estratégia diferença foi menos frequente comparativamente às duas anteriores. Nas tarefas *Piscinas*, *Sequência de losangos* e *Cubos de chocolate* não houve registo da aplicação da diferença, o que, por um lado, pode ser atribuído à estrutura não linear dos padrões envolvidos, mas também pode dever-se ao envolvimento de conceitos de natureza geométrica que podem ter tornado complexa a aplicação desta estratégia. A análise da utilização desta estratégia permite afirmar que os alunos privilegiaram a sua componente recursiva (D_1) que, curiosamente, surgiu tanto na generalização próxima como distante. À semelhança da estratégia diferença, a tentativa e erro não constou das opções dos alunos na exploração de três tarefas: *Os lembretes da Joana*, *A Pizzaria Sole Mio* e *Cubos de chocolate*. Esta abordagem foi por norma aplicada na resolução de questões que implicavam a reversibilidade do pensamento. Finalmente, pode-se verificar que a estratégia termo unidade é a que surge com menor frequência, tendo apenas sido utilizada nas tarefas *Os lembretes da Joana* e *Sequência de números* e só nesta última com sucesso.

À excepção da tarefa *Sequência de números*, nas restantes privilegiaram sempre estratégias de natureza visual, em particular, a contagem e a explícita.

A análise do trabalho dos alunos, em cada tarefa, permitiu ainda determinar o nível de eficácia das diversas estratégias que aplicaram. Na Tabela 17 pode ver-se a percentagem de aplicações correctas de cada uma das estratégias de generalização, nas sete tarefas exploradas.

Tabela 17 - Eficácia das estratégias de generalização em cada tarefa (em percentagem) – Turma A

Tarefa	C	TU_1	TU_2	TU_3	D_1	D_2	D_3	E	TE
Os lembretes da Joana	92	0	0	-	100	0	100	94	-
Piscinas	100	-	-	-	-	-	-	75	71
Sequência de números	-	100	-	100	100	-	-	100	0
A Pizzaria Sole Mio	100	-	-	-	100	0	0	100	-
Dobragens	100	-	-	-	100	-	-	100	100
Sequência de losangos	100	-	-	-	-	-	-	100	100
Cubos de chocolate	89	-	-	-	-	-	-	20	-

Começando por observar o nível de eficácia das estratégias visuais, conclui-se que, a utilização da contagem revelou-se quase sempre bem sucedida. Houve, no entanto, situações em que a contagem não foi aplicada de forma adequada, nomeadamente em questões de generalização distante ou através de contagens não organizadas. A estratégia explícita surgiu em todas as tarefas e, tal como a contagem, o nível de eficácia desta abordagem foi bastante elevado. No entanto, salientam-se alguns casos em que as dificuldades dos alunos com determinados conceitos e capacidades, principalmente no âmbito da geometria, condicionaram a obtenção de uma resposta correcta. As estratégias TU_3 e D_3 raramente foram aplicadas. Qualquer uma delas implica um ajuste baseado no contexto do problema, o que nem sempre se afigura fácil para os alunos e isso aconteceu com a estratégia D_3, na qual o ajuste nem sempre foi efectuado correctamente.

No que refere às estratégias não visuais, destaca-se a recursiva (D_1) como aquela que exibe o maior nível de eficácia, sempre que foi utilizada. A tentativa e erro foi maioritariamente aplicada em situações que envolviam a reversibilidade do pensamento e salvo determinados casos, em que foi utilizada sem o conhecimento prévio de uma regra ou quando o raciocínio dos alunos foi influenciado pelas dificuldades exibidas com conceitos de índole geométrica, regista um nível de eficácia razoável. A adequação das restantes estratégias numéricas (TU_1, TU_2 e D_2) é condicionada pela estrutura do padrão. A maioria das tarefas tinha subjacentes padrões cuja estrutura não podia ser modelada pela proporcionalidade directa, mas, mesmo assim, houve alunos que adoptaram estas estratégias, já que restringiram o seu trabalho ao contexto numérico, negligenciando o significado dos valores manipulados.

8.4. Desempenho dos alunos no pós-teste

A segunda aplicação do teste realizou-se após a experiência de ensino, quase no final do ano lectivo. Nesta fase, foram utilizados os mesmos procedimentos de análise que tinham já sido aplicados aos resultados do pré-teste, contemplando dados de natureza quantitativa e qualitativa.

As respostas dos alunos foram classificadas, usando como base a escala de avaliação proposta neste estudo e, posteriormente, procedeu-se ao cálculo das classificações médias por questão, para estabelecer uma comparação com os resultados obtidos no pré-teste (Tabela 18).

Tabela 18 - Médias das classificações da Turma A no pré-teste e no pós-teste

Questão	Pré-teste	Pós-teste
1.1	0,67	1,94
1.2	3,94	4,00
1.3	3,67	3,94
1.4	3,83	2,94
1.5	4,00	4,00
1.6	1,94	2,39
1.7	3,39	4,00
1.8	3,61	4,00
1.9	2,94	3,39
1.10	3,56	4,00
1.11	2,44	2,83
1.12	3,72	3,78
1.13	0,89	2,33
1.14	3,33	3,72
1.15	1,06	1,39
1.16	3,56	3,78
2.1	1,50	3,50
2.2	0,72	2,17
2.3	0,11	1,67
3.1	1,44	1,67
3.2	1,00	0,83

Para melhor compreender e comparar os resultados apresentados na Tabela 18, optou-se por analisar estes dados à luz das três tarefas propostas no teste, nomeadamente, a continuação de sequências e os dois problemas de generalização próxima e distante.

8.4.1. Tarefa 1 – Continuar sequências

Nesta primeira tarefa, em média, as classificações dos alunos melhoraram, à excepção da questão *1.4*, embora não se tenha registado uma descida acentuada. Trata-se de um padrão de crescimento de natureza visual que alguns alunos consideraram de repetição, condicionando deste modo a adequação dos dois termos seguintes.

Nas sequências referidas na análise dos resultados do pré-teste como aquelas em que os alunos revelaram piores resultados (questões *1.1*, *1.6*, *1.13* e *1.15*), a que registou uma diferença mais significativa foi a dos *Z's* (questão *1.13*). Houve um maior número de alunos a identificar a estrutura deste padrão de crescimento de tipo visual, descobrindo as alterações produzidas nas figuras, ao passar de um termo para o seguinte. Na sequência dos números triangulares (questão *1.1*), o número de alunos que conseguiram conjugar o número de pontos em cada figura com a sua disposição espacial aumentou. A sequência dos quadrados perfeitos, apresentada na questão *1.6*, também suscitou menos dificuldades, tendo havido mais alunos a identificar correctamente a variação ocorrida entre termos consecutivos. Na questão *1.15*, salienta-se que, apesar da ligeira subida nos resultados, continuaram a demonstrar o mesmo tipo de dificuldades, interpretando a sequência de polígonos como sendo de repetição ou simplesmente deixando a resposta em branco.

Tal como no pré-teste, evidenciaram melhores resultados na continuação de padrões de repetição (questões *1.7*, *1.10* e *1.16*) do que de crescimento, embora tenham melhorado o seu desempenho nos últimos.

8.4.2. Tarefa 2 – Problema das missangas

As diferenças mais significativas fizeram-se notar nos resultados associados a esta tarefa, tanto na generalização próxima como na generalização distante. Torna-se assim pertinente analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução desta tarefa (Tabela 19).

Tabela 19 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma A no problema 2 do pós-teste

Questões	**C**	TU_1	TU_2	TU_3	**TU**	D_1	D_2	D_3	**D**	**E**	**TE**	NC
2.1	**10**	1	-	-	**1**	7	-	-	**7**	**-**	**-**	-
2.2	**2**	3	2	-	**5**	9	-	-	**9**	**1**	**-**	1
2.3	**1**	4	4	-	**8**	5	-	1	**6**	**1**	**-**	2

Nas questões de generalização próxima (*2.1* e *2.2*) privilegiaram as estratégias contagem e recursiva (D_1), ambas adequadas a questões desta natureza. No entanto, houve ainda alunos a utilizar indevidamente a proporcionalidade directa, através das estratégias TU_1 e TU_2, o que significa que ou não ajustaram o resultado, após terem determinado múltiplos de termos conhecidos, ou fizeram-no erradamente sem estabelecer ligação com o contexto do problema. Ainda na generalização próxima, no cálculo do 8º termo da sequência (questão *2.2*), a utilização da contagem diminuiu, provavelmente devido à complexidade do desenho, mais alunos utilizaram o raciocínio recursivo e surgiu pela primeira vez a estratégia explícita. Comparando os resultados obtidos nesta questão com os da questão anterior, verifica-se que a média das classificações diminui, já que também aumentou o número de abordagens desadequadas, baseadas na utilização do raciocínio proporcional.

Os alunos continuaram a exibir maiores dificuldades na generalização distante, comparativamente com a generalização próxima, embora tenham tido mais sucesso do que no pré-teste. Apesar de constituírem processos exaustivos quando se está perante a descoberta de um termo distante, alguns alunos optaram pela contagem e pela estratégia recursiva. Destacam-se apenas dois alunos que identificaram regras mais directas, aplicando as estratégias explícita e múltiplo da diferença com ajuste (D_3). O recurso a estratégias desadequadas, no âmbito da categoria termo unidade, aumentou nesta questão, correspondendo a um total de 8 alunos. Após a fase de exploração das tarefas, era expectável que mais alunos fossem capazes de gerar regras de natureza explícita, principalmente porque nesta tarefa do teste as figuras apresentadas eram transparentes, tendo assim subjacente, e de forma clara, a estrutura do padrão.

À medida que a ordem do termo pretendido aumenta, os alunos tendem a privilegiar estratégias numéricas. Apenas na primeira questão da tarefa predominam estratégias de natureza visual, nomeadamente a contagem. Para além destas preferências, é também pertinente analisar a eficácia das abordagens utilizadas (Figura 44).

	Estratégias visuais (%)				Estratégias não visuais (%)				
	C	TU_3	D_3	E	TU_1	TU_2	D_1	D_2	TE
2.1	90	-	-	-	0	-	100	-	-
2.2	50	-	-	100	0	0	100	-	-
2.3	100	-	100	100	0	0	100	-	-

Figura 44 - Eficácia de cada estratégia na resolução do problema 2 – Turma A

À excepção da contagem, as estratégias visuais utilizadas pelos alunos revelaram-se adequadas em todas as situações em que foram aplicadas. No caso da contagem, foram identificados alguns erros associados à representação dos colares. A forma hexagonal das missangas e a disposição espacial das mesmas constituíram um obstáculo à correcta aplicação desta estratégia. No que refere às estratégias não visuais, apenas a recursiva se adequou ao contexto do problema, tendo sido aplicada também na generalização distante.

8.4.3. Tarefa 3 – Problema dos rectângulos

Os resultados associados a esta tarefa não evidenciam diferenças significativas comparando com os que foram obtidos no pré-teste. Na primeira questão, os alunos revelaram uma ligeira melhoria mas, na segunda questão, a média das classificações foi inferior no pós-teste. Para além de envolver capacidades de visualização espacial, associadas à identificação dos rectângulos, este problema contempla figuras não transparentes, factos que podem ter contribuído para que o nível de insucesso se mantivesse.

Tabela 20 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma A no problema 3 do pós-teste

Questões	**C**	TU_1	TU_2	TU_3	**TU**	D_1	D_2	D_3	**D**	**E**	**TE**	NC
3.1	**12**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**2**	**-**	4
3.2	**4**	6	-	-	**6**	-	-	-	**-**	**2**	**-**	6

Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos em cada questão, conclui-se que na primeira questão continuaram a privilegiar a contagem. Esta estratégia também surgiu na generalização distante (questão *3.2*) mas com menor frequência do que no pré-teste. Dois alunos utilizaram um raciocínio organizado que lhes permitiu descobrir uma regra para determinar o número de rectângulos de qualquer dimensão, recorrendo assim a uma estratégia explícita. O número de alunos a utilizar um raciocínio proporcional na generalização distante aumentou, tendo concluído erradamente que o número de rectângulos duplicava da primeira para a segunda questão. Uma possível justificação para esta situação pode estar associada ao facto de terem sido influenciados pelo ensino da proporcionalidade directa, durante o ano lectivo.

	Estratégias visuais (%)				Estratégias não visuais (%)				
	C	TU_3	D_3	E	TU_1	TU_2	D_1	D_2	TE
3.1	0	-	-	100	-	-	-	-	-
3.2	0	-	-	100	0	-	-	-	-

Figura 45 - Eficácia de cada estratégia na resolução do problema 3 – Turma A

Na resolução da questão *3.1*, na qual se promove a generalização próxima, os alunos privilegiaram estratégias visuais. Apenas a estratégia explícita conduziu a uma resposta correcta, já que a contagem, não sendo organizada, não permitiu a descoberta de todos os rectângulos possíveis. Na generalização distante (questão *3.2*), usaram em igual número estratégias visuais e não visuais, mas, mais uma vez, apenas a estratégia explícita se mostrou eficaz.

8.5. Análise comparativa dos resultados do pré-teste e do pós-teste

Na secção anterior deste capítulo, foram analisados os resultados obtidos pelos alunos pós-teste, procedendo-se à comparação destes com os resultados do pré-teste, focando as estratégias de generalização utilizadas, as dificuldades sentidas e a influência da visualização no seu desempenho. No entanto, é também fundamental recorrer a processos estatísticos que permitam estudar, de uma forma mais objectiva, a evolução dos alunos, analisando o impacto da experiência de ensino no seu desempenho.

Na Figura 46 apresenta-se a distribuição das classificações dos alunos da turma A no pré-teste e no pós-teste. O diagrama de extremos e quartis permite fazer um estudo exploratório, sintetizando os dados, mas também analisar frequências e identificar observações aberrantes (*outliers*) que tendem a distorcer a média e o desvio padrão. Os diagramas apresentados foram construídos com base nas classificações globais dos alunos, em cada um dos testes, numa cotação máxima de 84 pontos.

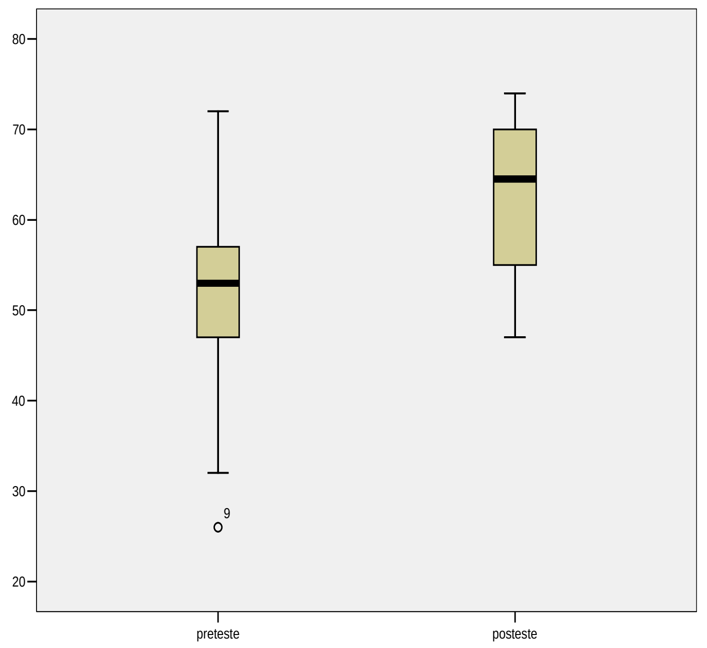


Figura 46 – Distribuições dos resultados do pré-teste e do pós-teste – Turma A

Analisando os diagramas apresentados, relativos aos resultados do pré-teste e do pós-teste, conclui-se que a turma A melhorou o seu desempenho da primeira para a segunda aplicação do teste. Conjugando esta informação com os valores relativos às medidas de localização (Tabela 21), verifica-se que no pré-teste há uma maior amplitude amostral e uma maior dispersão dos dados.

Tabela 21 - Medidas de localização relativas aos resultados do pré-teste e do pós-teste - Turma A

	Pré-teste	Pós-teste
Média	51,(3)	63,(1)
Mínimo	26	47
1º Quartil (Q_1)	46	55
Mediana	53	64,5
3º Quartil (Q_3)	58	70,5
Máximo	72	74

Na primeira aplicação do teste a observação mínima registada é de 26 pontos, correspondente a um *outlier* moderado na distribuição, elemento que se entendeu manter na amostra, e a observação máxima é de 72 pontos. No pós-teste, a turma A apresenta uma classificação mínima de 47 pontos, resultado mais elevado do que na aplicação anterior do teste, e uma observação máxima de 74 pontos, não havendo neste caso registo de *outliers*. A análise da distância inter-quartil, nas duas distribuições, permite verificar que no pré-teste 50% dos alunos obtiveram classificações situadas entre 46 e 58 pontos, enquanto no pós-teste esses limites passaram a ser de 55 e 70,5 pontos. Estes dados revelam a existência de diferenças no desempenho dos alunos da turma A do pré-teste para o pós-teste.

Para analisar se estas diferenças são significativas e compreender os efeitos da experiência de ensino no desempenho dos alunos da turma A, procedeu-se à comparação deste grupo de alunos com o grupo de controlo. Foi então efectuada uma análise de covariância (ANCOVA), estipulando como factor o grupo (1=Turma A, 3=Grupo de controlo), como variável dependente os resultados do pós-teste e como covariante os resultados do pré-teste. A variável pré-teste foi introduzida como variável independente de modo a controlar, pelo menos parcialmente, a sua influência no desempenho dos alunos no pós-teste, permitindo, desse modo, a análise da relação directa entre a variável dependente (pós-teste) e o factor (grupo).

Antes de aplicar a ANCOVA é fundamental verificar os pressupostos que lhe estão subjacentes, nomeadamente: normalidade das distribuições; homogeneidade das variâncias; relação linear entre a covariante e a variável dependente; homogeneidade das rectas de regressão; e a fiabilidade da medição da covariante.

As tabelas 22 e 23 referem-se aos valores obtidos a partir dos testes de normalidade, para as distribuições dos resultados da turma A e do grupo de controlo, no pré-teste e no pós-teste, respectivamente.

Tabela 22 - Testes de normalidade para a distribuição dos resultados dos testes – Turma A

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	Df	Sig.
Pré-teste	,137	18	,200(*)	,948	18	,401
Pós-teste	,124	18	,200(*)	,945	18	,355

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

Tabela 23 - Testes de normalidade para a distribuição dos resultados dos testes – Grupo de controlo

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	Df	Sig.
Pré-teste	,102	27	,200(*)	,971	27	,624
Pós-teste	,139	27	,196	,947	27	,183

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

Dado que, tanto na turma A como no grupo de controlo, $p>0,05$, conclui-se que as distribuições analisadas não são significativamente diferentes da distribuição normal, quer no pré-teste quer no pós-teste.

Para analisar a homogeneidade das variâncias utilizou-se o teste de Levene. Na Tabela 24 podem ser observados os valores relativos à aplicação do teste referido.

Tabela 24 - Teste da homogeneidade das variâncias para a variável pós-teste – Turma A e grupo de controlo

		Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Pós-teste	Based on Mean	7,172	1	43	,010
	Based on Median	4,578	1	43	,038
	Based on Median and with adjusted df	4,578	1	35,105	,039
	Based on trimmed mean	7,070	1	43	,011

Como neste caso $p<0,05$, optou-se por efectuar uma transformação dos dados em análise, elevando-os ao quadrado, de forma a estudar se, nesse caso, se verifica o pressuposto de homogeneidade das variâncias.

Tabela 25- Teste da homogeneidade das variâncias para a variável pós-teste após ajuste dos dados

		Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Quad_Pós-teste	Based on Mean	1,184	1	43	,283
	Based on Median	,970	1	43	,330
	Based on Median and with adjusted df	,970	1	41,543	,330
	Based on trimmed mean	1,240	1	43	,272

Após o ajuste dos resultados, pode concluir-se que a variável dependente pós-teste, apresenta variâncias semelhantes para os dois grupos em estudo, neste caso a turma A e o grupo de controlo. Observando a média, verifica-se que $F(1,43)=1,184$ e $p>0,05$, o que significa que as variâncias não são significativamente diferentes, cumprindo deste modo o pressuposto de homogeneidade de variâncias.

Para estudar a linearidade entre a covariante (pré-teste) e a variável dependente (pós-teste) procedeu-se ao cálculo do coeficiente de correlação de Pearson (r), para a turma

A e para o grupo de controlo, de forma a medir a intensidade da associação linear existente entre as duas variáveis.

Tabela 26 - Correlação entre pré-teste e pós-teste – Turma A

		Pré-teste	Pós-teste
Pré-teste	Pearson Correlation	1	0,725*
	Sig. (2-tailed)		,001
	N	18	18
Pós-teste	Pearson Correlation	,725*	1
	Sig. (2-tailed)	,001	
	N	18	18

*. Correlation is significant at the 0,05 level (2-tailed).

Analisando a informação apresentada na Tabela 26, conclui-se que o coeficiente de correlação é positivo (r=0,725), existindo uma relação linear estatisticamente significativa (p<0,05) entre as duas variáveis.

Tabela 27 - Correlação entre pré-teste e pós-teste – Grupo de controlo

		Pré-teste	Pós-teste
Pré-teste	Pearson Correlation	1	0,768**
	Sig. (2-tailed)		0,000
	N	27	27
Pós-teste	Pearson Correlation	0,768*	1
	Sig. (2-tailed)	0,000	
	N	27	27

**. Correlation is significant at the 0,01 level (2-tailed).

No que refere ao grupo de controlo (Tabela 27), também se conclui que o coeficiente de correlação é positivo (r=0,768), existindo uma relação linear estatisticamente significativa (p<0,01) entre as duas variáveis estudadas.

O estudo da homogeneidade das rectas de regressão permite verificar se a interacção entre a covariável (pré-teste) e o factor (grupo) é significativa.

Tabela 28 - Homogeneidade das rectas de regressão na interacção grupo – pré-teste

Source	Type III Sum of Squares	Df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	6965,887(a)	3	2321,962	37,782	,000
Intercept	1744,551	1	1744,551	28,386	,000
Grupo	190,904	1	190,904	3,106	,085
Pré-teste	2079,539	1	2079,539	33,837	,000
grupo * pré-teste	10,285	1	10,285	,167	,685
Error	2519,757	41	61,457		
Total	132626,000	45			
Corrected Total	9485,644	44			

a R Squared = ,603 (Adjusted R Squared = ,574)

Consultando a Tabela 28, verifica-se que F(1,41)=0,167 e *p*>0,05, o que indica que não existe uma interacção significativa entre os resultados do pré-teste e o grupo. Estes resultados permitem concluir que o pressuposto de homogeneidade das rectas de regressão não é violado, abrindo a possibilidade de analisar o impacto do factor (grupo) na variável dependente (pós-teste).

A fiabilidade da covariante (pré-teste), foi medida antes do início da experiência de ensino, usando o alpha de Cronbach. O valor obtido através deste procedimento estatístico foi 0,845, podendo considerar-se um índice de fiabilidade bom (Fraenkel e Wallen, 1990).

Depois da verificação de todos os pressupostos supracitados, passou-se à análise de covariância cujos resultados se apresentam na Tabela 29.

Tabela 29 - Análise de covariância – Turma A e Grupo de controlo

Source	Type III Sum of Squares	Df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	6955,602(a)	2	3477,801	57,733	,000
Intercept	2554,481	1	2554,481	42,406	,000
Pré-teste	3456,402	1	3456,402	57,378	,000
grupo	1949,753	1	1949,753	32,367	,000
Error	2530,042	42	60,239		
Total	132626,000	45			
Corrected Total	9485,644	44			

a R Squared = ,587 (Adjusted R Squared = ,568)

Como se pode observar pelos resultados da Tabela 29, houve diferenças significativas entre os sujeitos estudados, resultantes do tipo de grupo em que se encontravam (F(1,42)=32,367 e *p*<0,05. Deste modo, os resultados obtidos pela turma A no pós-teste diferem significativamente dos resultados apresentados pelo grupo de controlo, mesmo depois dos efeitos do desempenho no pré-teste terem sido controlados.

CAPÍTULO 9

O CASO CARLA E MARGARIDA

Neste capítulo descreve-se, de forma pormenorizada, a participação de duas alunas que integraram o estudo, a Carla e a Margarida. Começa-se por dar a conhecer características pessoais e académicas, referindo aspectos particulares das suas vivências bem como do percurso escolar. Posteriormente, é feita a análise do trabalho desenvolvido pelas alunas ao longo do estudo, em particular, na exploração das tarefas propostas.

9.1. Caracterização das alunas

No início do 6.º ano de escolaridade a Carla tinha 11 anos. Esta aluna vive com os pais e com um irmão mais novo. Nos seus tempos livres frequenta o clube de dança da escola, bem como um curso de computadores, mas também gostar de ver televisão.

A Carla não teve qualquer retenção até ao momento do estudo, tendo concluído o 5.º ano de escolaridade com nível 4 na maioria das disciplinas. Destacou como disciplinas preferidas a Matemática e o Inglês. A primeira por ser "prática e fácil de aplicar" e a língua estrangeira por ser "uma língua diferente" que lhe permitia compreender "o que dizem nos filmes e nas músicas". No que respeita à disciplina de Matemática, ao longo do ano lectivo anterior, foi uma aluna constante tendo obtido sempre nível 4 em todos os períodos. Sublinhou que gosta de fazer de tudo um pouco em Matemática, no entanto a sua preferência incide "nos exercícios sobre áreas" e revelou sentir por vezes algumas dificuldades em "perceber alguns problemas".

Em geral, é uma criança calma e simpática, sempre com um sorriso envergonhado estampado no rosto. Este comportamento mantém-se no seu dia-a-dia, dentro e fora da sala de aula. É uma aluna bastante organizada e responsável nos trabalhos que realiza, procurando quase sempre certificar-se da correcção das suas produções.

A Margarida iniciou o 6.º ano de escolaridade com 10 anos de idade. Vive com os pais e dois irmãos mais novos. Ouvir música, ver televisão e frequentar o clube de dança da escola são as actividades preferidas de ocupação dos tempos livres.

Tal como a Carla, a Margarida nunca reprovou. No entanto, é uma aluna com um aproveitamento inferior ao da colega, tendo concluído o 5.º ano de escolaridade com nível 3 na maioria das disciplinas. Como disciplinas preferidas salientou a História por ser "fácil de perceber" e Educação Visual e Tecnológica confessando ter "jeito para desenhar". Apesar de ter obtido nível 3 na disciplina de Matemática, no final do 3.º período, a Margarida foi revelando algumas dificuldades ao longo do ano lectivo não conseguindo atingir a positiva nos dois períodos anteriores. Destacou a resolução de problemas como uma das suas maiores dificuldades nesta disciplina, justificando que "são difíceis" e que frequentemente não sabe por onde começar, referiu também que aquilo que mais gosta de fazer na aula de Matemática é calcular expressões numéricas.

Tem alguns traços na sua personalidade semelhantes aos da colega, é também calma e simpática mas um pouco mais introvertida do que a Carla. Raramente toma a iniciativa nas aulas, mesmo quando sente dúvidas, principalmente quando se trata de uma discussão em grande grupo. No entanto, a disposição dos alunos em pares na sala de aula faz com que se sinta "mais à vontade" para "conversar com o colega", interagindo no sentido de discutir as suas dúvidas e ideias.

Ao observar o trabalho realizado pela Carla e pela Margarida enquanto par, ao longo das várias tarefas propostas, foi possível verificar que as alunas primaram pela organização na apresentação das suas respostas. Inicialmente resolviam os problemas numa folha de rascunho e só depois procediam à sua transcrição, tarefa que coube à Carla por decisão unânime das duas alunas. Neste grupo, foi a Carla que de uma forma mais frequente impôs o ritmo de trabalho. Mostrou-se bastante persistente na resolução das questões propostas, relembrando várias vezes o seu par que não podiam avançar para o problema seguinte sem concluir o que estavam a resolver. Esta atitude foi sendo gradualmente interiorizada pela Margarida.

Nas diversas tarefas exploradas ao longo do ano, houve uma preocupação evidente por parte dos dois elementos do par em discutir possíveis abordagens de resolução e chegar a um consenso para apenas posteriormente aplicarem a estratégia escolhida. Apesar de a Carla ter uma atitude mais interventiva, ambas revelaram interesse e motivação na exploração dos problemas, tendo efectivamente trabalhado de forma colaborativa dando, cada uma delas, o seu contributo para o trabalho realizado.

9.2. A exploração das tarefas

Nesta secção descreve-se o trabalho desenvolvido pela Carla e pela Margarida ao longo da experiência de ensino. É feita uma análise da forma como exploraram cada uma das tarefas propostas, focando o tipo de estratégias usadas, as dificuldades sentidas e o papel da visualização no seu raciocínio. No final da secção, apresenta-se um balanço do seu desempenho, procedendo à síntese e comparação dos dados resultantes do seu trabalho.

9.2.1. Tarefa 1 - Os lembretes da Joana

Na exploração da tarefa *Os lembretes da Joana*, as alunas começaram por fazer a representação visual de um conjunto de seis lembretes, para proceder à sua contagem. Mas, em simultâneo, apresentaram o cálculo do número de *pioneses* utilizando a estratégia recursiva, tendo identificado a diferença entre termos consecutivos e continuado a sequência até ao sexto termo. Esta situação evidencia a necessidade que estas alunas sentem em validar o seu raciocínio por intermédio de cálculos, não reconhecendo essa função ao desenho, facto que foi confirmado posteriormente durante a entrevista com o par.

> Investigadora: Como é que chegaram à solução? Como é que descobriram que eram necessários dezanove *pioneses*?
> Carla: Fazendo um desenho!
> Investigadora: E que cálculos são estes aqui ao lado da figura?
> Margarida: São os… *pioneses* que precisávamos para os 6 cartazes.
> Investigadora: Então e como explicam esse cálculo…3+3+3+3+3+3+1?
> Margarida: Estes seis têm 3…
> Carla: […] são destes todos (aponta para os seis lembretes).
> Margarida: E depois mais um que ficava a descoberto.
> Carla: No último!
> Investigadora: E com o desenho não conseguiam chegar à mesma conclusão?
> Margarida e Carla: Sim!
> Carla: Mas pensamos que se podia fazer melhor assim!

Esta abordagem repetiu-se na resolução da questão *4.1*, na qual as alunas recorreram novamente às estratégias contagem e recursiva, desenhando desta vez 6 lembretes triangulares e apresentando o cálculo do número de *pioneses* como complemento.

Na abordagem à segunda questão, sentiram que o desenho não seria uma estratégia útil, já que lhes tomaria muito tempo.

Investigadora: E na segunda alínea (*2*), pretendíamos saber o número de *pioneses*, mas para trinta e cinco lembretes! Aí já não fizeram um desenho. Porquê?
Carla: Eram muitos!
Margarida: Pois, tínhamos que desenhar 35.

Optaram antes pela utilização de uma estratégia explícita, tendo por base a distribuição dos *pioneses* pelos lembretes. Identificaram uma regra que relacionava o número de *pioneses* com o número de lembretes, referindo que existiam três *pioneses* em cada lembrete excepto no último, onde teriam de colocar mais um. Através da utilização desta estratégia foram capazes de generalizar, de forma eficaz, para um valor distante.

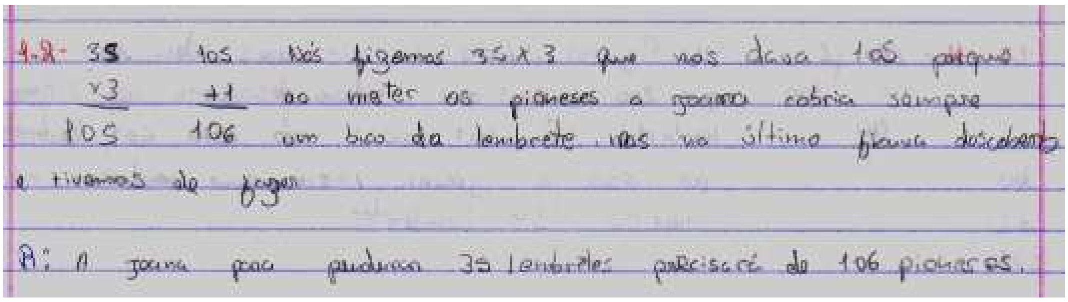


Figura 47 - Resolução da questão *2* da Tarefa 1 apresentada pela Carla e pela Margarida

Investigadora: E então como é que calcularam o número de *pioneses*?
Margarida: Fiz trinta e cinco cartazes vezes […] vezes isto (aponta para a figura no enunciado).
Investigadora: Vezes o quê?
Carla: Vezes três.
Margarida: Estas três coisinhas que leva.
Carla: E depois mais um.
Margarida: (interrompe a colega) Era o descoberto (referindo-se ao último *pionés*)!
Investigadora: Portanto, vocês fizeram trinta e cinco grupinhos de três.
Carla: (interrompe a investigadora) Dos lembretes todos.
Margarida: [Em simultâneo com a colega] E mais um *pionés* no fim.

Apesar de dar lugar a um padrão diferente, a situação proposta na alínea *4.2* tem uma estrutura semelhante à que se acabou de analisar. Trata-se de uma questão de generalização distante onde apenas se altera a disposição dos *pioneses* que desta vez se encontram distribuídos por lembretes triangulares. À semelhança do que tinha sucedido com as questões apresentadas anteriormente, as alunas mostraram consistência nas abordagens utilizadas na resolução de questões da mesma natureza, aplicando, neste caso, uma estratégia explícita. Identificaram a existência de 2 *pioneses* em cada lembrete sendo que o último teria mais um *pionés* do que os outros.

Investigadora: Então agora os lembretes são diferentes.
Margarida e Carla: São triângulos.
Investigadora: E então o que se passa neste caso?
Carla: É que eles…
Margarida: Só dá dois…
Carla: (Continua o raciocínio) […] dois em cada um e depois mais um.
Margarida e Carla: […] que ficou descoberto.

Na resolução das questões *3* e *4.3* este grupo usou a estratégia D_3. Recorreram à diferença entre termos consecutivos procedendo a um ajuste do resultado com base no contexto do problema. No caso dos lembretes rectangulares, consideraram que os 600 *pioneses* seriam distribuídos em grupos de três (diferença entre dois termos consecutivos da sequência), mas como era necessário 1 *pionés* para o último lembrete, sentiram necessidade de ajustar o resultado.

Investigadora: Agora têm seiscentos *pioneses* e querem saber quantos lembretes vão poder pendurar. Expliquem-me o vosso raciocínio (refere-se à resolução apresentada pelas alunas).
Margarida: Acho que está certa.
Investigadora: Eu não disse que estava errada! Só quero que pensem alto, que me expliquem como fizeram?
Margarida e Carla: Seiscentos a dividir por três.
Margarida: (Continua) […] que é estas […] (aponta para os grupos de 3 *pioneses*).
Investigadora: Foram fazer grupinhos de três porquê?
Carla: Porque cada um (lembrete) tem três *pioneses* e depois um no fim.
Investigadora: Então conseguiram fazer duzentos grupinhos de três. Podem pendurar 200 lembretes, é isso?
Carla: Mas um ficou de fora.
Investigadora: Um?
Carla: Um coisinho (refere-se a um *pionés*)
Investigadora: E onde o vamos buscar?
Margarida e Carla: Não temos.
Carla: Temos que tirar um cartaz! Ficamos com cento e noventa e nove.

Conclui-se dos comentários das alunas que o contexto do problema foi crucial no seu raciocínio. Reconheceram o significado dos números que manipularam e a sua representatividade na situação problemática proposta, tendo assim verificado a necessidade de proceder a um ajuste no cálculo efectuado previamente.

Para os lembretes triangulares as alunas pensaram de forma análoga tendo apenas procedido à adaptação da diferença entre termos consecutivos. Tal como já tinha sucedido em alíneas analisadas previamente, o reconhecimento da distribuição dos *pioneses* pelos lembretes foi um ponto-chave na chegada à solução. Neste caso, apesar de se tratar da generalização distante, não recorreram ao mesmo tipo de estratégia que tinham aplicado na resolução das alíneas *2* e *4.2*. Esta mudança de estratégia poderá estar associada ao facto de se pretender promover a reversibilidade do pensamento, procurando-se estabelecer a relação inversa da que tinha sido considerada previamente, ou seja, dado o número de *pioneses* determinar o número de lembretes.

	Estratégias de generalização			
Questões	C	D_3	E	
1	X			Generalização Próxima
4.1	X			
2			X	Generalização Distante
3		X		
4.2			X	
4.3		X		

Figura 48 - Síntese das estratégias usadas pela Carla e pela Margarida na Tarefa 1

A Figura 48 sintetiza o trabalho desenvolvido pelas alunas na exploração da Tarefa 1. Verifica-se que não recorrem ao mesmo tipo de estratégias em questões de *generalização próxima* e *distante*. Há uma mudança de abordagem quando a nível de generalização se altera, recorrendo a estratégias como contagem, diferença e explícita. Não obstante, é possível afirmar que apresentam consistência no raciocínio quando as questões são do mesmo tipo. É de salientar a importância atribuída pelas alunas à apresentação de cálculos que, na sua opinião, constituem o método de validação das suas respostas. Mas, apesar da relevância atribuída ao contexto numérico é indubitável o papel fundamental da visualização em quase todas as suas estratégias: no caso da contagem, a acção é executada sobre a figura; nas estratégias explícita e diferença com ajuste, apresentam os cálculos tendo por base o contexto do problema. Destaca-se ainda que as generalizações formuladas pelas alunas ao longo da exploração da tarefa foram sempre de natureza construtiva.

9.2.2. Tarefa 2 – *Piscinas*

Esta sessão teve início com a leitura da tarefa, seguida de alguns esclarecimentos acerca da notação associada às dimensões das piscinas e da possibilidade de utilização de cores na representação dos azulejos. Após esta primeira fase, as alunas iniciaram o seu trabalho com bastante entusiasmo. Começaram por representar na folha de resposta uma piscina de dimensões 10×6, apresentando um modelo bem organizado, com os azulejos centrais pintados de azul e os azulejos do bordo por colorir.

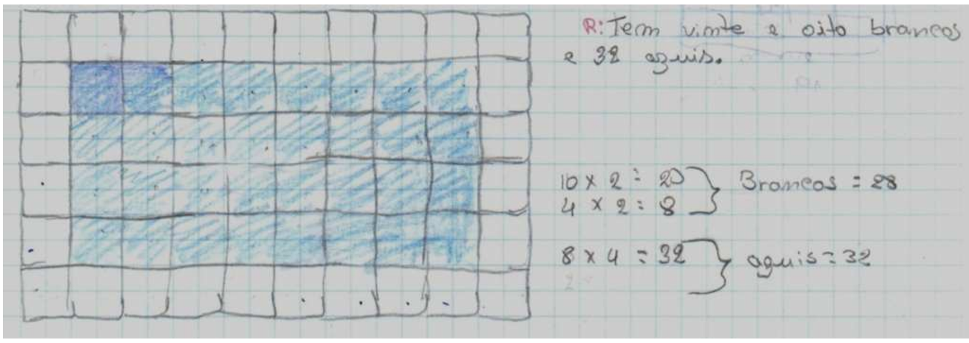


Figura 49 - Resolução da questão *1* da Tarefa 2 apresentada pela Carla e pela Margarida

Como se observa na Figura 49, após terem desenhado a piscina pretendida, as alunas não procederam a uma contagem azulejo a azulejo. Com base na representação que efectuaram, encontraram uma forma de cálculo mais eficaz para o número de azulejos de cada cor.

Investigadora: Queria que me explicassem como pensaram para descobrirem o número de azulejos de cada cor na piscina de dimensões 10×6. Como começaram?
Carla: Fizemos um desenho.
Investigadora: Hum […] um desenho. E depois?
Carla: Fizemos dez vezes dois que era esta e esta [aponta para o conjunto de azulejos que se encontram no comprimento].
Margarida: Era dez aqui e aqui [faz o mesmo que a colega].
Investigadora: E como chamamos a isto que estão a apontar?
Carla: Os lados.
Margarida: O comprimento.
Investigadora: [Repetindo] O comprimento. Muito bem!
Margarida: Vezes a largura.
Carla: Vezes a largura? Não! Fizemos dez vezes dois que é o de cima e o de baixo.
Margarida: Sim, é isso!
Investigadora: E depois o que é que fizeram?
Carla: E depois fizemos 4×2. Tirámos dois que já estavam contados quando contamos os dez.
Margarida: E juntamos tudo!
Investigadora: Juntaram tudo?
Margarida: Sim! Os vinte [10×2] mais os oito [4×2].
Investigadora: E o que calcularam ao juntar tudo?
Carla: Os quadrados brancos.
Investigadora: Então e os azuis?
Margarida: Foi 8×4.
Investigadora: Porquê?
Carla: São quatro filas com oito quadrados.

Tal como já tinha sucedido na tarefa anterior, perante uma questão de generalização próxima, optaram por construir um modelo visual que serviu de suporte ao seu raciocínio. Os cálculos apresentados pelas alunas reflectem a identificação visual de agrupamentos de azulejos e não o recurso a uma contagem termo a termo.

Na resolução das duas alíneas da questão *2* aplicaram uma estratégia explícita. As expressões numéricas apresentadas pelas alunas são consistentes com as relações descobertas na questão anterior.

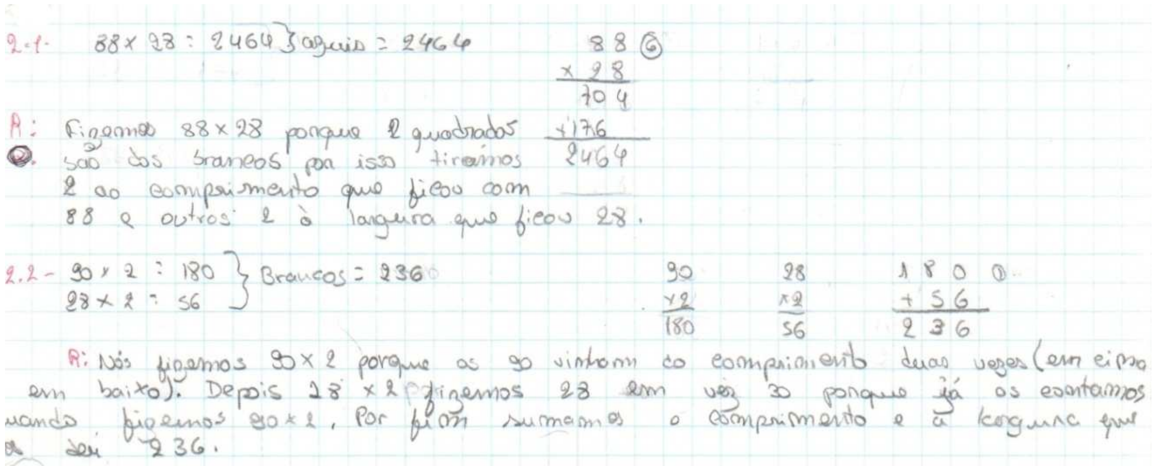


Figura 50 - Resolução da questão *2* da Tarefa 2 apresentada pela Carla e pela Margarida

Neste caso, não procederam à construção de um modelo visual, argumentando que se tratava de uma "piscina muito grande" e que não iria "caber na folha". Foram capazes de aplicar a regra descoberta no caso anterior a uma piscina com a mesma estrutura mas dimensões maiores. No entanto, é de referir que a sua maior preocupação centrou-se nos cálculos e no caso da questão *2.2* a expressão que deveriam apresentar aparece compartimentada.

A terceira questão da tarefa suscitou algumas dificuldades. Começaram por determinar os azulejos azuis recorrendo à tentativa e erro. Após descobrirem as dimensões do quadrado azul, concluíram que a piscina teria dimensões 19×19 uma vez que "tinha mais dois azulejos do que um lado com azulejos azuis". No entanto, no caso dos azulejos brancos, apresentaram o cálculo 19×4, sem qualquer fundamentação ou suporte visual. Utilizaram uma regra que, para além de ser diferente da aplicada nos casos anteriores, não se adequa à disposição dos azulejos brancos. Na entrevista as alunas foram questionadas acerca da validade deste raciocínio.

Investigadora: Para determinar o número de azulejos brancos, vocês fizeram 19×4.

Carla e Margarida: Sim! [respondem em simultâneo].
Investigadora: Conseguem explicar-me porquê?
Carla: Eram os que estavam à volta e os lados são todos iguais.
Margarida: Porque é quadrada.
Investigadora: Bom [...] então vou convidar-vos a desenhar a piscina. Só para termos a certeza.
Margarida: Mas com os dezanove azulejos?
Investigadora: Sim, se quiserem. Se não, podem imaginar que têm os dezanove azulejos.
[Segue-se uma pausa enquanto a Margarida desenha uma piscina quadrada com dezanove quadrados de lado].
Investigadora: Já está?
Carla: Não! Faltam os azuis!
[A Margarida desenha um quadrado, todo pintado de azul, com dimensões 17×17].
Investigadora: Vamos então pensar se será 19×4.
Carla: É o que está à volta, 19+19+19+19.
[Após um momento de pausa]
Margarida: Não! É como nas outras [referindo-se às questões anteriores]. Em cima e em baixo é dezanove mas depois tira-se dois.
Investigadora: Explica lá melhor Margarida.
Margarida: Aqui e aqui é dezanove [aponta para os azulejos dispostos em lados opostos do quadrado] e depois nestes dois lados estes azulejos já estão contados [aponta para os azulejos colocados nos cantos]. Temos que tirar dois e fica dezassete.
Carla: Pois, é como nas outras [referindo-se às questões anteriores].
Investigadora: E então? O que me dizem?
Carla: Não é 19×4.
Margarida: É 19×2 e 17×2.

Com o objectivo de calcular os azulejos que estavam *à volta* aplicaram o conceito de perímetro, tendo negligenciado a sobreposição de azulejos nos cantos. O modelo visual utilizado na entrevista contribuiu não só para que criticassem a validade desse raciocínio mas também para concluírem que a regra identificada na resolução das questões anteriores era extensível a este caso.

	Estratégias de generalização			
Questões	C	E	TE	
1	X			Generalização Próxima
2.1		X		Generalização Distante
2.2		X		
3			X	

Figura 51 - Síntese das estratégias usadas pela Carla e pela Margarida na Tarefa 2

Nesta tarefa as alunas mostraram preferência por estratégias de natureza visual, nomeadamente a contagem e a explícita. A forma como utilizaram a contagem, na resolução da primeira questão, contribuiu para a formulação de regras explícitas, aplicáveis aos casos apresentados nas questões *2.1* e *2.2*, cuja estrutura se enquadra numa generalização de natureza construtiva. Após o recurso à tentativa e erro, a não utilização de um modelo visual, na exploração da terceira questão da tarefa, pode ter estado na base dos erros cometidos por estas alunas, mostrando algumas dificuldades com o conceito de perímetro.

9.2.3. Tarefa 3 – Sequência de números

Tal como nas tarefas anteriores, foi notório o envolvimento das alunas na resolução desta tarefa. Demonstraram um espírito de entreajuda constante, dialogando e trocando opiniões ao longo de toda a sessão. A folha de resposta revela, mais uma vez, a preocupação dos elementos deste par com apresentação e organização do seu trabalho.

Após a leitura do enunciado, rapidamente começaram a resolver a primeira questão. Continuaram correctamente a sequência por mais duas linhas mantendo a disposição visual dos números. Como resolveram a tarefa em papel pautado, decidiram construir uma grelha para registar a sequência. Quando questionadas acerca desta opção, sublinharam a importância da organização dos dados.

> Carla: Para conseguirmos escrever melhor. É mais fácil!
> Margarida: Assim não nos enganamos nos números.

Apesar de terem continuado a sequência sem colocar qualquer dúvida, as alunas sentiram muitas dificuldades na explicação da regra que utilizaram (questão *2*), aliás como a maioria dos alunos da turma. Depois de se ter referido que poderiam recorrer a diferentes tipos de representações, não só a linguagem corrente, começaram a esboçar uma resposta na folha de rascunho.

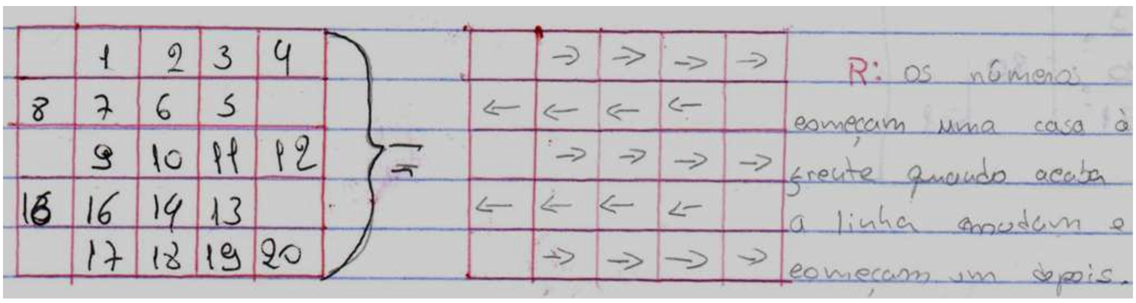


Figura 52 - Resolução da questão *2* da Tarefa 3 apresentada pela Carla e pela Margarida

Construíram duas grelhas, uma com a sequência numérica até 20 e outra que, em vez de números, incluía setas com sentidos diferentes de linha para linha. Estabeleceram uma correspondência entre as duas representações, através do símbolo =, e acrescentaram uma descrição da regra baseada no esquema. Tanto as grelhas como a explicação em linguagem corrente evidenciam o impacto da componente visual da sequência no seu raciocínio. Na entrevista houve oportunidade para clarificar o raciocínio das alunas na resolução desta questão.

> Investigadora: Podem explicar-me melhor este esquema que utilizaram?
> Carla: Deixámos o quadradinho que era este [aponta para a célula correspondente à 1ª linha e 1ª coluna] em branco.
> Margarida: Depois pusemos quatro setas.
> Investigadora: E o que significam as setas?
> Margarida: Os números [...] Como se continua.
> Investigadora: Como se continua?!?
> Carla: Sim! Crescem assim [percorre com o dedo a 1ª linha da esquerda para a direita].
> Margarida: Depois, em baixo [refere-se à 2ª linha], começamos mais à frente um quadrado.
> Investigadora: Mas as setas não são iguais.
> Carla: São ao contrário.
> Margarida: É assim que crescem os números.

Ao longo da sessão de exploração da tarefa conseguiram identificar algumas relações numéricas na sequência (questão *3*), nomeadamente: a 1ª e a 5ª colunas variam de 8 em 8 unidades; a 2ª e a 4ª colunas são constituídas por números ímpares; a 3ª coluna é constituída por números pares; é uma sequência com números inteiros que em cada linha diferem em 1 unidade. A reflexão sobre estas descobertas e uma análise mais aprofundada durante a entrevista contribuíram para que as alunas reconhecessem outros padrões.

Para identificar a posição ocupada pelo número 40 (questão *4*) utilizaram um raciocínio recursivo (D_1). A Figura 53 ilustra o processo utilizado pelas alunas. Construíram uma grelha onde colocaram os números da sequência, mantendo o arranjo da mesma, e prolongaram-na até obter o valor pretendido.

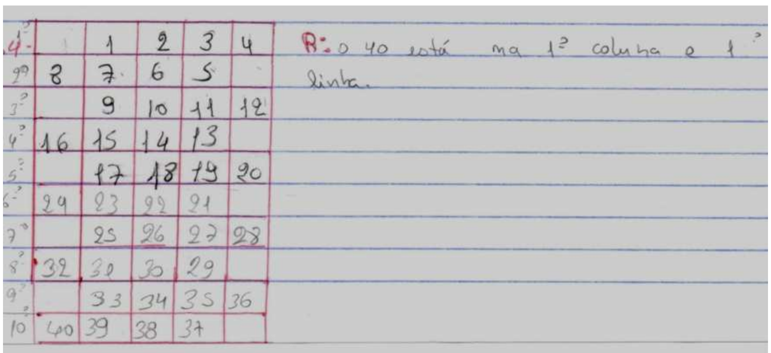


Figura 53 - Resolução da questão *4* da Tarefa 3 apresentada pela Carla e pela Margarida

Na localização do número 81 (questão *5*), utilizaram duas estratégias distintas, uma para determinar a linha outra para determinar a coluna. As relações numéricas que descobriram na resolução da segunda questão contribuíram para a identificação da coluna, aplicando deste modo uma estratégia explícita.

> Investigadora: Vocês começam por dizer que o 81 só pode estar na primeira ou na quarta coluna. Porquê?
> Carla: Porque são as colunas dos números ímpares.
> Margarida: Mas o 81 está na primeira coluna.
> Investigadora: Porquê?
> Margarida: Porque a primeira é a da tabuada do 8. E o 81 é a seguir a 80.

A linha ocupada pelo número 81 foi determinada através da aplicação de um raciocínio de tipo recursivo (D_1). Neste caso não representaram a sequência na íntegra, "porque eram mais números", centraram-se apenas na primeira coluna, "que tem os números da tabuada do 8", e registaram todos os seus elementos, até obter 80. Descobriram assim que 81 estaria na linha seguinte, a vigésima primeira.

As alunas revelaram muitas dificuldades na identificação da posição ocupada pelo número 542 (questão *5*). Começaram por utilizar a tentativa e erro com o intuito de descobrir se se tratava de um múltiplo de 8. Como não era o caso acabaram por não conseguir resolver o problema.

> Investigadora: Que cálculos são estes? [50×8=400; 60×8=480; 65×8=520; 67×8=536; 68×8=544]
> Carla: Era para ver se o 542 era da primeira coluna.
> Investigadora: E como sabiam?
> Carla: Se fosse da tabuada do 8 estava.
> Investigadora: E então? Está ou não?
> Margarida: Não, não deu. Passou.
> Investigadora: Mas o 81 também não era da primeira coluna e conseguiram descobri-lo.
> Margarida: Era mais pequenino.
> Carla: E este pode estar em duas colunas. Nas pares [refere-se à 3ª e à 4ª colunas]. Não sabemos onde.
> Investigadora: E porque é que neste caso não fizeram como nos anteriores? Porque é que não continuaram a sequência?
> Carla: Oh stôra! Nunca mais acabávamos.

Concluíram que determinadas estratégias, como a recursiva, não se adequavam a um valor tão distante, sendo impensável prolongar a sequência, tal como fizeram nos casos anteriores. A grandeza do número foi também um factor decisivo para que não fossem capazes de aplicar devidamente uma estratégia explícita com base no conhecimento da posição dos múltiplos de 8.

	Estratégias de generalização			
Questões	D_1	E	TE	
1	X			Generalização Próxima
4	X			Generalização Distante
5.1	X	X		
5.2			X	

Figura 54 - Síntese das estratégias usadas pela Carla e pela Margarida na Tarefa 3

Na resolução desta tarefa as alunas privilegiaram o raciocínio recursivo, como estratégia de generalização, em quase todas as alíneas, mostrando neste caso preferência por uma abordagem numérica. O facto de esta estratégia não se adequar à identificação de termos distantes pode ter contribuído para as dificuldades sentidas na localização do número 542.

9.2.4. Tarefa 4 – A Pizzaria Sole Mio

Após a leitura da tarefa em grande grupo, a Carla e a Margarida estiveram algum tempo sem efectuar registos na sua folha de resposta. Nas tarefas anteriores, iniciaram de imediato o seu trabalho, utilizando normalmente representações de natureza visual. Neste caso, curiosamente, começaram por centrar a sua atenção no enunciado, enquanto discutiam entre si. A resposta à primeira questão explica, de certa forma, este comportamento. Foram o único grupo a utilizar uma estratégia explícita, mesmo perante uma questão de generalização próxima. Apresentaram o cálculo 2×10+2 e referiram que estavam "10 pessoas de cada lado da mesa e 2 na ponta". Na entrevista, as alunas explicaram o que esteve na base do seu raciocínio.

Investigadora: Como chegaram à conclusão que eram 22 pessoas?
Carla: Porque são 10 de cada lado e 2 estão nas pontas?
Investigadora: Mas basearam-se em quê?
Carla: Nos desenhos.
Investigadora: Não vejo aqui nenhum desenho [refere-se à folha de resposta].
Margarida: Estes desenhos [aponta para o enunciado da tarefa].
Investigadora: E o que viram nestes desenhos que vos tivesse ajudado?
Margarida: Nesta mesa [aponta para a mesa com 3 pizzas] são 3 pessoas de cada lado e 2 em cada ponta, e na outra [refere-se à mesa com 4 pizzas] são 4 de cada lado e 2 na ponta.
Carla: E fizemos da mesma maneira [refere-se à questão *1*].

Apesar de não terem construído um modelo visual do 10.º termo da sequência, descobriram o padrão e consequentemente a regra, aplicada na resolução da questão *1*, através da observação das figuras apresentadas no enunciado da tarefa.

Na questão *2*, pedia-se o 31.º termo da sequência, promovendo deste modo a generalização distante. As alunas voltaram a recorrer a uma estratégia explícita, utilizando a regra identificada anteriormente, mas, desta vez, ajustada a um conjunto de 31 pizzas.

As maiores dificuldades sentidas por este par reflectiram-se na terceira questão da tarefa. Aqui pedia-se a ordem ocupada por um determinado termo, promovendo o raciocínio inverso do utilizado nas questões anteriores. As alunas mudaram de estratégia, tendo aplicado D_2. Como se tratava de um padrão linear impunha-se um ajuste do resultado, após o recurso a um múltiplo da diferença, condição que não cumpriram.

Depois de efectuarem o cálculo 58÷2 e concluírem que teriam 29 pizzas, fizeram uma representação visual da situação, acompanhada dos valores encontrados. No entanto, o desenho não serviu para verificarem a validade do seu raciocínio, caso contrário teriam concluído que não estava correcto. Durante a entrevista, tentou-se, por um lado, compreender a forma como as alunas pensaram, mas também que reflectissem nos erros cometidos.

Investigadora: Queria que me explicassem como resolveram a questão *3*.
Carla: Fizemos 58 a dividir por 2 para sabermos quantas pizzas eram.
Investigadora: E porque é que fizeram esse cálculo [58÷2]?
Margarida: Fizemos as pessoas todas a dividir por duas filas e deu 29.
Investigadora: Ok! E depois fizeram aqui um esquema ao lado. Porquê?
Margarida: Era como as pizzas e as pessoas estavam na mesa.
Investigadora: Então vamos pensar ao contrário. Usando estes valores que colocaram no esquema, quantas pessoas têm na mesa?
[pausa]
Carla: Acho que dá 60 [depois de fazer os cálculos num papel].
Investigadora: Mas não eram 58 pessoas?
Carla: Temos mal.
Investigadora: Têm mal! Então porquê?
Margarida: Oh! É por causa das que estão nas pontas. Essas não contam para as pizzas.
Investigadora: Não contam?
Margarida: Não! As pizzas são iguais às que estão de lado.
Carla: Tínhamos que fazer menos duas que era 56 e dividir por 2.

Ao iniciar a resolução da questão *4* sentiram as mesmas dificuldades que a grande maioria da turma sentiu, associadas à compreensão do enunciado. Os esclarecimentos feitos em grande grupo permitiram-lhes ultrapassar essas dúvidas. Começaram por estudar os casos das mesas com 8 e 10 pessoas (questão *4.1*), recorrendo às representações visuais de cada mesa, mas, ao fim de algum tempo, desistiram e optaram por uma abordagem numérica.

> Investigadora: Eu pude ver no momento em que resolviam esta questão que começaram por usar um desenho das mesas mas depois apagaram.
> Margarida: Foi!
> Investigadora: O que estavam a tentar fazer?
> Carla: Dividir as pizzas em fatias.
> Margarida: Mas não estávamos a conseguir.
> Investigadora: Preferiram usar cálculos.
> Carla: Era mais fácil!

Efectuaram as divisões 3÷8 e 4÷10 e compararam os números obtidos, concluindo assim que na mesa de 10 pessoas o João teria direito a uma maior quantidade de pizza.

Na questão seguinte (questão *4.2*), aproveitando a sugestão dada do enunciado, testaram mais dois casos. Experimentaram para uma mesa com 20 pizzas e outra com 30. Segundo as alunas, estes valores foram escolhidos "à sorte", no entanto, o número de pessoas associadas a cada uma dessas mesas foi determinado através de uma estratégia explícita, aplicando a mesma regra que já tinham usado nas questões *1* e *2*. Estes dois casos foram suficientes para convencer as alunas de que "quantos mais convidados mais pizza come o João", tendo para isso efectuado as respectivas divisões, comparando os números obtidos.

	Estratégias de generalização		
Questões	D_2	E	
1		X	Generalização Próxima
2		X	Generalização Distante
3	X		
4.2		X	

Figura 55 - Síntese das estratégias usadas pela Carla e pela Margarida na Tarefa 4

A Figura 55 permite ter uma ideia geral da forma como a Carla e Margarida exploraram a Tarefa 4. Usaram predominantemente uma estratégia explícita, quer em questões de generalização próxima quer distante. As expressões obtidas da aplicação desta estratégia representam generalizações de natureza construtiva, já que *vêem* o padrão decomposto em partes disjuntas, observando dois conjuntos iguais nas laterais e dois elementos em cada ponta da mesa. Salienta-se o recurso a uma estratégia desadequada na questão *3*, na qual se pretendia promover a reversibilidade do pensamento. Neste caso, as alunas deram maior relevância ao contexto numérico. Apesar de terem representado visualmente a solução não utilizaram esse modelo como forma de validar o resultado obtido.

9.2.5. Tarefa 5 – *Dobragens*

Esta foi a tarefa em que a Carla e a Margarida revelaram mais dificuldades. Ao longo da sessão, não foi possível deixar de notar que demoraram mais tempo do que o habitual a copiar para a folha de resposta os registos efectuados na folha de rascunho e que os seus rostos espelhavam alguma confusão. Na entrevista assumiram que consideraram esta tarefa "um bocadinho mais complicada de resolver do que as outras". Apesar de tudo, não deixaram de mostrar o mesmo envolvimento e empenho que tinham revelado até aqui.

Após a leitura do enunciado, iniciaram de imediato a resolução da tarefa. A Margarida ficou encarregue da manipulação da folha de jornal e a Carla dos registos, como era habitual.

Na resolução da primeira questão perderam algum tempo a discutir previsões entre si. Na sessão, foi possível observar que a dúvida residia na terceira dobragem, mostrando alguma indecisão sobre se a folha estaria dividida em 6 ou 8 partes. Depois de chegarem a um consenso, registaram na folha de resposta que o jornal ficaria dividido em 8 partes iguais. Na entrevista promoveu-se uma discussão acerca da previsão que fizeram e como chegaram a essa conclusão.

> Investigadora: Como é que pensaram para chegar a essa resposta? Como é que chegaram a esta conclusão sem abrir a folha?
> Margarida: Ao dobrar, contámos.
> Investigadora: Ao dobrar, contaram. Expliquem lá melhor.
> Margarida: Imaginamos.
> Investigadora: Pensem alto para eu perceber.
> Carla: Dobramos uma vez, que nos dava duas partes.
> Margarida: Fica dividida a meio.
> Carla: Depois dobramos outra vez e fica com 4 partes.
> Investigadora: E porque é que a folha fica dividida em 4 partes? O que é que aconteceu?
> Margarida: Aumentou mais duas.
> Investigadora: E depois?
> Carla e Margarida: Dobramos outra vez.
> Margarida: E fica com 8 partes.
> Investigadora: Então não aumenta mais duas?
> Margarida: Não! É mais 4.
> Carla: Depois é mais 4.
> Investigadora: Porquê? O que aconteceu?

Margarida: Ao dobrar a folha divide-se a meio. Fica com mais 4 partes. Duas de um lado e duas do outro.

As alunas mostraram ter ultrapassado a dificuldade inicial fundamentando claramente a sua conjectura.

Para resolver a segunda questão da tarefa recorreram à contagem. Apresentaram um desenho (Figura 56), referente às dobragens efectuadas, que serviu de base à resposta dada.

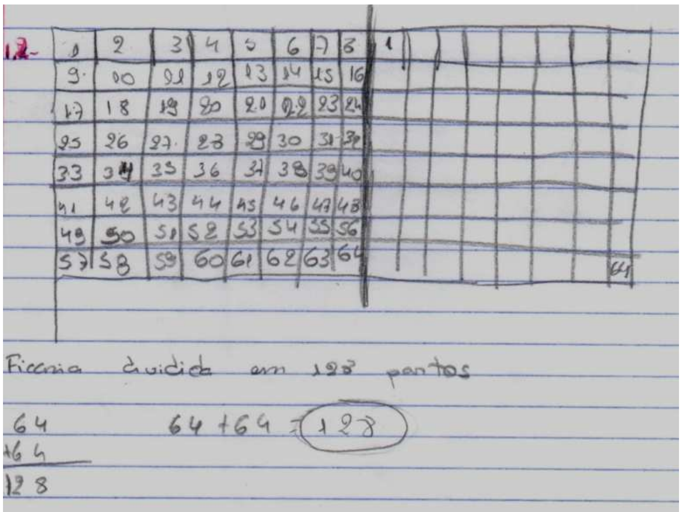


Figura 56 - Resolução da questão *2* da Tarefa 5 apresentada pela Carla e pela Margarida

Na entrevista descreveram o significado da representação apresentada na folha de resposta.

Investigadora: O que é que significa este desenho?
Margarida: É a folha de jornal.
Investigadora: Gostava que me explicassem melhor o que está aqui desenhado.
Carla: Fizemos uma folha de jornal e dividimos em duas partes.
Investigadora: Sim. E depois.
Carla e Margarida: E depois…
Carla: […] no jornal contámos os quadradinhos.
Investigadora: E de onde é que vieram esses quadradinhos?
Margarida: Ao dobrar o jornal 7 vezes.
Investigadora: Então vocês usaram a folha de jornal?
Carla: Sim! Dobramos 7 vezes, abrimos e contamos.
Margarida: Abrimos e apareceu 64 em cada página.

As alunas recorreram inicialmente à folha de jornal. Após sete dobragens abriram a folha e optaram por representar, sob a forma de desenho, o que observaram. A contagem do número de secções encontradas não foi efectuada de forma unitária, teve antes subjacente o conceito de área.

À medida que os valores pedidos se iam tornando mais distantes (questão *4*) e surgiu a necessidade de encontrar uma regra que relacionasse as variáveis envolvidas (questão *3*), a Carla e Margarida não foram capazes de utilizar estratégias adequadas, obtendo nestes casos respostas incorrectas. Na terceira questão, usaram o caso particular descoberto anteriormente (questão *2*) e generalizaram referindo: "temos de multiplicar o comprimento pela largura, por exemplo 16×8". No entanto, não estabeleceram nenhuma condição para as unidades de medida relativas ao comprimento e à largura. Compreenderam, ao longo da entrevista, que esta regra apresentava limitações e que não eram capazes de a aplicar a todos os casos.

> Investigadora: Vocês dizem que têm de multiplicar o comprimento pela largura.
> Carla e Margarida: Sim!
> Investigadora: E deram um exemplo. Que exemplo é este?
> Margarida: É aquele que dobramos 7 vezes?
> Investigadora: E se eu quisesse saber o número de partes em que a folha ficaria dividida depois de a dobrar 20 vezes? Como seria?
> Carla: [depois de uma pausa] É difícil stôra! Não íamos conseguir dobrar a folha para saber.

Como vinham a utilizar o conceito de área para generalizar, na questão *4* não foi diferente. Mas, neste caso, colocava-se o problema inverso. Supondo que a folha estava dividida em 1024 partes, quantas dobragens teriam sido feitas. As alunas começaram então por considerar que a área da folha era 1024, tomando cada parte como unidade de área, e o objectivo passava por determinar o comprimento e a largura da folha.

> Investigadora: O que representam estes valores? O que é que estavam a tentar saber?
> Carla: Como havia 1024 quadradinhos, queríamos saber o número para cada lado.

Para determinar estes valores apresentaram os seguintes cálculos e fundamentação: 1024÷2=512, a folha tem comprimento 512; 512÷2=256, a folha tem largura 256. Para além de não relacionarem estes valores com o número de dobragens, deixando assim a questão sem resposta, revelaram que o conceito de área não está completamente interiorizado. A verificação da validade do seu raciocínio tinha-as convencido que algo não estava bem, bastava analisarem se as dimensões encontradas correspondiam à área esperada.

A última questão da tarefa foi resolvida sem qualquer dificuldade, tendo determinado correctamente a área, para cada um dos casos.

	Estratégias de generalização		
Questões	C	NC	
1	X		Generalização Próxima
2	X		Generalização Distante
3		X	
4		X	

Figura 57 - Síntese das estratégias usadas por Carla e Margarida na Tarefa 5

Em síntese, esta foi uma das tarefas que trouxe maiores dificuldades à Carla e Margarida e na qual cometeram mais erros. A Figura 57 mostra que tanto na generalização próxima como distante privilegiaram a contagem. Este tipo de estratégia não contribuiu para que se libertassem dos casos particulares e descobrissem uma relação entre a variável dependente e a variável independente, útil na resolução das questões *3* e *4*, nas quais não foram bem sucedidas. Ao contrário da maioria da turma não usaram o raciocínio recursivo, mostrando-se demasiado presas à representação visual.

9.2.6. Tarefa 6 – Sequências de losangos

As alunas iniciaram o seu trabalho com a construção de um losango de lado 4 (questão *1.1*), usando assim a contagem para determinar o número de peças necessárias. Contrariamente ao que tinha sucedido em tarefas anteriores, não apresentaram cálculos a acompanhar a figura, tendo contado as peças, unitariamente, a partir do desenho.

O cálculo do número de peças utilizadas num losango de lado 50 (questão *1.2*) tem implícita uma generalização distante, facto que contribuiu para a alteração da estratégia aplicada pelas alunas.

> Investigadora: Nesta questão mudaram de estratégia. Já não usaram um desenho, como na anterior [refere-se à questão *1.1*].
> Carla: Porque era um losango muito grande.
> Margarida: Porque eram muitas peças.
> Investigadora: E então o que é que fizeram?
> Margarida: Pusemos 50×50.
> Investigadora: Porquê? Expliquem lá.

Margarida: Porque era 50 de lado.
Carla: 50 de lado e 50 de lado [aponta para dois dos lados do losango de lado 4].
Margarida: Dos lados todos.
Investigadora: Então todos os lados do losango medem 50, é isso?
Carla e Margarida: Sim!
Investigadora: Mas ainda não responderam à minha questão. Porquê 50×50?
Carla: Para saber as peças todas.
Margarida: É a área stôra. Dá a área e dá as peças.

Como se pode perceber, as alunas utilizaram uma estratégia explícita, com base no conceito de área, reconhecendo que a contagem seria, neste caso, um processo exaustivo.

A questão *2* potencia a reversibilidade do pensamento, através do cálculo do perímetro de um losango constituído por 324 peças. Tal como os restantes grupos, a Carla e a Margarida, recorreram à tentativa e erro, de forma a descobrir o comprimento do lado do losango pretendido. Sabendo que o número de peças se obtinha do produto *lado*×*lado*, as alunas testaram diversos valores até concluírem que 18×18=324. Depois de descobrirem o comprimento do lado do losango, determinaram o seu perímetro sem qualquer dificuldade.

A terceira questão da tarefa foi aquela em que a Carla e a Margarida se sentiram menos à vontade. Para analisar a relação entre os perímetros de losangos nas condições estipuladas (questão *3.1*), estudaram apenas um caso (Figura 58). Construíram os losangos de lado 2 e lado 6 e determinaram o perímetro de cada polígono.

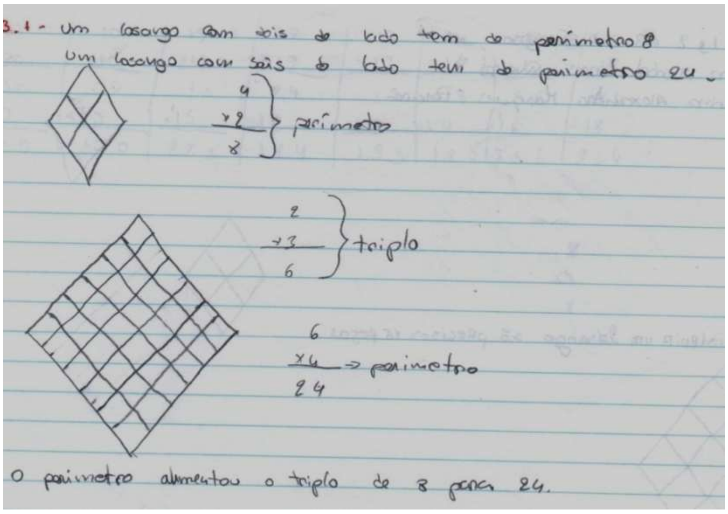


Figura 58 - Resolução da questão *3.1* da Tarefa 6 apresentada pela Carla e pela Margarida

A resposta apresentada pelas alunas evidencia que a regra encontrada é de tipo factual, já que, na sua descrição, fazem referência ao caso particular testado. Esta ideia é reforçada pela reacção das alunas na entrevista.

Investigadora: Na vossa resposta à questão 3.1 vejo aqui desenho e cálculos. Podem explicar-me como pensaram?
Margarida: Fizemos um de lado 2 e um de lado 6.
Carla: E o perímetro para os dois.
Investigadora: Porque razão desenharam?
Carla: Para não nos enganarmos. Assim era mais fácil para os cálculos.
Investigadora: Então, depois disso, o que concluíram quanto à relação entre os perímetros das duas figuras?
Carla: O perímetro aumentava o triplo de 8 para 24.
Investigadora: E será que é sempre assim ou terá acontecido apenas com estes dois losangos?
[As alunas não respondem].
Investigadora: Se não têm a certeza podem experimentar para outros casos.
Margarida: Um de 3 pode ser [refere-se ao lado do losango]?
Investigadora: Pode ser o que vocês quiserem.
Carla: Então o outro tem de ser de 9.
Investigadora: Muito bem! E agora?
Carla: Vamos ver os perímetros [...] Este [losango de lado 3] tem perímetro 12 [faz 4×3] e este [losango de lado 9] tem perímetro 36 [faz 4×9].
Investigadora: Será que a regra se mantém?
Margarida: 3×12 é 36.Também é o triplo.

Para resolver a questão *3.2*, começaram por usar os mesmos losangos da alínea anterior, o de lado 2 e o de lado 6. Depois de determinarem a área de cada losango, não conseguiram relacionar os valores obtidos de maneira a formular uma regra. Decidiram então construir mais dois losangos, um de lado 3 e outro de lado 9. Na entrevista as alunas fundamentaram as suas opções e a forma como pensaram.

Investigadora: Aqui [refere-se à questão 3.2] começaram por utilizar os losangos de lado 2 e de lado 6.
Margarida: Usamos os mesmos [refere-se à questão 3.1] e fizemos a área.
Investigadora: Mas depois usaram mais dois losangos, o de lado 3 e o de lado 9. Porquê?
Carla: Esta era mais difícil!
Investigadora: Como assim?
Carla: Não sabíamos a regra como na outra [refere-se à questão 3.1].
Investigadora: E estes dois losangos ajudaram? A que conclusão chegaram?
Margarida: A área é nove vezes maior, 4×9 é 36 e 4×9 é 81. É da tabuada do 9.

As duas últimas questões mostram que as alunas, apesar de terem começado por utilizar figuras para representar os losangos seleccionados, passaram a trabalhar num contexto puramente numérico a partir do momento que determinaram os perímetros e as áreas. Os polígonos desenhados não serviram de base à construção das regras, as alunas centraram-se apenas nas relações entre os valores obtidos nos cálculos efectuados.

	Estratégias de generalização			
Questões	C	E	TE	
1.1	X			Generalização Próxima
1.2		X		Generalização Distante
2			X	

Figura 59 - Síntese das estratégias usadas pela Carla e pela Margarida na Tarefa 6

Conclui-se, da análise da Figura 59, que as alunas recorreram a diversas estratégias na resolução desta tarefa, todas elas adequadas às situações propostas. Nas questões de generalização próxima e distante utilizaram abordagens diferentes, optando pela contagem, no primeiro caso, e pelas estratégias explícita e tentativa e erro para determinar valores mais distantes. Apesar de, em geral, não terem revelado dificuldades significativas na exploração da tarefa, destaca-se, no âmbito da generalização distante, a formulação de regras ou expressões gerais. As suas conjecturas tiveram normalmente por base o estudo de um caso particular, tendo analisado mais casos apenas quando não eram capazes de encontrar relações entre os elementos.

9.2.7. Tarefa 7 – Cubos *de chocolate*

Na resolução desta tarefa, tal como se verificou nas anteriores, a Carla e a Margarida apresentaram um trabalho bastante metódico e organizado. Apesar da confusão que se instalou logo no início da sessão, relacionada com a utilização dos cubos de encaixe, as alunas mantiveram-se calmas, esperaram que lhes fosse entregue o material e iniciaram a resolução da tarefa logo após a leitura da mesma.

As alunas começaram por utilizar os cubos de encaixe na construção de um cubo de aresta 3. Fizeram apenas um cubo, ao contrário do que sucedeu em outros grupos, mas ambas participaram na construção encaixando as peças de forma sucessiva. Tomando por base o contexto do problema, colocaram um cubo amarelo no meio e escolheram a cor castanha para os cubos visíveis. Para determinar o número de cubos unitários com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate usaram como estratégia a contagem, tendo feito esse cálculo elemento a elemento.

Carla: Era o chocolate stôra. Mas tinha um cubo amarelo dentro que era o caramelo.
Investigadora: Eu vi! [...] E depois de construírem o cubo de aresta 3 o que fizeram?
Margarida: Contamos.
Investigadora: Contaram?
Margarida: Sim [...] contamos os cubinhos.
Investigadora: E o que é que fizeram? Contaram as pecinhas uma a uma ou encontraram outra forma de contar?
Carla: Contamos uma a uma.

Deram continuidade ao seu trabalho através da construção de um cubo de aresta 4. Segundo as alunas, optaram por este caso porque “era mais fácil para contar os cubinhos”. Apesar de no enunciado se pedir que fizessem experiências com cubos de outras dimensões, limitaram-se a estudar este caso. Organizaram, numa tabela, os dados relativos aos cubos de arestas 1, 2, 3 e 4, incluindo ainda uma coluna com o volume de cada cubo, desta forma poderiam “ver se os números estavam certos”, ou seja, se tinham contado correctamente o número de cubos unitários em cada caso. Destaca-se ainda que, para os cubos de arestas 1 e 2 que eram dados no enunciado, as alunas assumiram ter recorrido também à modelação referindo que desta forma “víamos melhor os cubinhos”

Para o cubo de aresta 10 não foram capazes de identificar o número de cubos unitários com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate. Tentaram preencher a tabela acima apresentada para este cubo, mas apenas determinaram o seu volume. Quando acabaram de ler a questão *3*, a primeira reacção da Carla e da Margarida foi automaticamente construir o cubo de aresta 10 mas ao fim de algum tempo desistiram, fundamentando que “era muito grande” e que iam “precisar de muitos cubinhos”. A partir deste momento, concluíram que a estratégia contagem, tal como vinha a ser aplicada, deixava de fazer sentido. No entanto, não conseguiram encontrar uma estratégia alternativa que lhes permitisse resolver este problema de generalização distante.

	Estratégias de generalização		
Questões	C	NC	
1	X		Generalização Próxima
2	X		
3		X	Generalização Distante

Figura 60 - Síntese das estratégias usadas pela Carla e pela Margarida na Tarefa 7

Como se pode concluir do trabalho das alunas, privilegiaram a contagem como estratégia de generalização, tendo por base modelos construídos com o material fornecido. A forma como aplicaram esta estratégia, contando cubo a cubo, não contribuiu para que visualmente identificassem uma forma directa de cálculo, dos cubos unitários de cada tipo, para qualquer cubo e, por essa razão, não foram bem sucedidas na generalização distante.

9.2.8 Síntese da exploração das tarefas

Após a análise detalhada do trabalhado desenvolvido pela Carla e pela Margarida, ao longo da experiência de ensino, apresenta-se uma síntese centrada em aspectos como as estratégias de generalização privilegiadas, dificuldades sentidas e o papel da visualização no seu raciocínio.

9.2.8.1. Estratégias de generalização

Em geral, ao longo da experiência de ensino, estas alunas recorreram a estratégias diferentes na resolução de questões de generalização próxima e distante. Esta situação verificou-se sempre que, na determinação de termos próximos, aplicavam a contagem ou o raciocínio recursivo, tendo concluído que qualquer uma destas estratégias representava um processo demasiadamente exaustivo para descobrir termos mais distantes.

Na generalização próxima, privilegiaram quase sempre a contagem, destacando-se apenas duas tarefas onde não o fizeram: na primeira questão da tarefa *Sequência de números*, na qual se pretendia que continuassem a sequência por mais duas linhas, o que conduziu à utilização do raciocínio recursivo; e na tarefa *A Pizzaria Sole Mio*, onde deduziram de imediato, a partir das figuras fornecidas no enunciado, uma regra que relacionava o número de pizzas com o número de pessoas, o que lhes permitiu utilizar uma estratégia explícita.

No que respeita à generalização distante, identificou-se uma maior diversidade de estratégias no trabalho das alunas. Na maioria das tarefas, solicitava-se que os alunos determinassem o termo que ocupava uma dada ordem na sequência, mas também eram contempladas questões que promoviam a reversibilidade do pensamento, pedindo-se que identificassem a ordem associada a um determinado termo da sequência. Verificou-se que, nestes dois tipos de questões, a Carla e Margarida optaram sempre por abordagens diferentes. Na primeira situação prevaleceu a estratégia explícita e na segunda variaram entre as estratégias diferença (D_2 e D_3) e tentativa e erro. Destacam-se ainda casos pontuais, ao nível da generalização distante, nos quais as alunas recorreram a estratégias que não seriam expectáveis, como a recursiva e a contagem, por exemplo: na tarefa *Sequência de números* usaram o raciocínio recursivo para localizar termos numa posição distante; e na tarefa *Dobragens*, dobraram a folha de papel 7 vezes, de forma a contar o número de partes em que esta ficou dividida.

9.2.8.2. Dificuldades emergentes do trabalho das alunas

Durante a fase de exploração das tarefas, a Carla e a Margarida expressaram algumas dificuldades na resolução de determinadas questões de generalização distante, em particular quando estava implicada a reversibilidade do pensamento. Nas tarefas *Piscinas* e *A Pizzaria Sole Mio*, apesar de terem utilizado de forma adequada uma estratégia explícita, para determinar termos da sequência conhecida a sua ordem, optaram por uma abordagem incorrecta quando a questão foi colocada de forma inversa. Em qualquer um destes casos, a dada altura, as alunas trabalharam exclusivamente com representações numéricas e não verificaram a validade das suas conclusões, no contexto dos problemas. Por exemplo, na questão *3* da tarefa *Piscinas*, determinaram o número de azulejos brancos com base no conceito de perímetro, não se apercebendo da sobreposição dos azulejos posicionados nos cantos, no entanto, previamente tinham aplicado uma regra que contemplava esta situação, formulada a partir das representações visuais de diferentes piscinas. Já na resolução da terceira questão da tarefa *A Pizzaria Sole Mio*, estando perante um padrão de tipo linear, utilizaram a estratégia D_2 que não se adequa a um padrão com esta estrutura. Curiosamente, após efectuarem os cálculos, fizeram uma representação visual da solução e não se aperceberam que esta não cumpria as condições do problema, o que permite concluir que essa representação não foi utilizada com o objectivo de validar a solução encontrada.

No que refere à generalização distante, destacam-se ainda algumas tarefas nas quais as alunas não foram capazes de estruturar uma resposta, nomeadamente nas tarefas *Sequência numérica e Cubos de chocolate*. A incapacidade de resolver estes problemas para termos distantes, pode estar relacionada com as estratégias utilizadas nas questões anteriores e das quais não conseguiram libertar-se, respectivamente, a recursiva e a contagem. Esta situação também aconteceu na resolução da tarefa *Dobragens*. Não tendo identificado uma regra que relacionasse de forma imediata as variáveis em jogo, apresentaram uma abordagem completamente desadequada. De entre estas tarefas, aquelas em que revelaram maior insucesso têm estrutura não linear, nomeadamente as tarefas *Dobragens* e *Cubos de chocolate*.

9.2.8.3. Papel da visualização no desempenho das alunas

Tanto nas questões de generalização próxima como nas de generalização distante, estas alunas privilegiaram estratégias de natureza visual, respectivamente, a contagem, tendo por base a utilização de representações visuais, e a explícita, deduzindo a regra a partir do contexto do problema. Nestes casos, conseguiram sempre ser bem sucedidas nas suas respostas.

Na exploração das primeiras tarefas, mesmo tendo dado preferência a estratégias visuais como a contagem, recorreram a uma validação de natureza numérica. Uma vez que nas aulas de Matemática eram utilizados cálculos, na resolução da maior parte das tarefas, as alunas não consideravam que o desenho servisse de argumentação para as suas respostas. No entanto, de forma gradual, a Carla e a Margarida alteraram esta concepção.

Reconheceram que a contagem nem sempre é uma estratégia eficaz, podendo tornar-se um processo demasiadamente exaustivo se o objectivo passar pela descoberta de termos distantes. Esta estratégia foi utilizada de diferentes formas pelas alunas. Em algumas tarefas limitaram-se a contar um a um os elementos presentes nas representações usadas, noutras (por exemplo, *Os lembretes da Joana* e *Piscinas*) efectuaram uma contagem baseada na disposição espacial dos elementos que tinham de calcular. Esta segunda abordagem contribuiu para que conseguissem formular uma estratégia explícita adequada ao cálculo de termos distantes. No entanto, a forma como aplicaram a contagem nas tarefas *Dobragens* e *Cubos de chocolate* não contribuiu para que formulassem uma regra que relacionasse directamente as variáveis em jogo.

Em todo o seu trabalho, nunca recorreram à estratégia termo unidade. Os padrões apresentados variaram na sua estrutura, entre lineares e não lineares, mas em nenhum dos casos se adequava a utilização de um raciocínio proporcional, a não ser que posteriormente fosse efectuado um ajuste do resultado. Quando aplicável, este tipo de estratégia (TU_3) conduz a generalizações de tipo desconstrutivo, cuja formulação normalmente se revela complexa para os alunos (Rivera & Becker, 2008). As estratégias visuais utilizadas pela Carla e pela Margarida, conduziram sempre à formulação de generalizações de natureza construtiva.

Algumas das dificuldades identificadas em determinadas tarefas podem relacionar-se com o nível de compreensão de certos conceitos geométricos e com o nível de desenvolvimento de capacidades de visualização espacial. Notou-se que os conceitos de área e perímetro nem sempre foram correctamente utilizados, condicionando a adequação das estratégias aplicadas, por exemplo nas tarefas *Piscinas* e *Dobragens*. Em tarefas como *Dobragens* e *Cubos de chocolate*, verificou-se ainda que as capacidades de visualização espacial não estão totalmente desenvolvidas, tendo originado limitações ao nível do raciocínio das alunas, impedindo-as de atingir um grau de abstracção que lhes permitisse formular regras que relacionassem as variáveis dependente e independente.

CAPÍTULO 10

O CASO ANTÓNIO E DANIEL

Neste capítulo descreve-se, de forma pormenorizada, a participação de dois alunos que integraram o estudo, o António e o Daniel. Começa-se por dar a conhecer características pessoais e académicas, referindo aspectos particulares das suas vivências bem como do percurso escolar. Posteriormente, é feita a análise do trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo do estudo, em particular, na exploração das tarefas propostas.

10.1. Caracterização dos alunos

No início do 6.º ano de escolaridade o António tinha 10 anos. O aluno vive com os pais e com uma irmã mais velha. Nos seus tempos livres pratica futebol e frequenta os escuteiros, mas também referiu que, sempre que pode, anda de patins em linha.

O António não teve qualquer retenção até ao momento do estudo, tendo concluído o 5.º ano de escolaridade com nível 4 na maioria das disciplinas. Destacou como disciplinas preferidas Educação Física e Ciências da Natureza. A primeira por "adorar praticar desporto" e a segunda por ter oportunidade de "fazer experiências". No que respeita à disciplina de Matemática, iniciou o ano lectivo anterior com nível 3, mas nos restantes períodos lectivos evoluiu para o nível 4. Quanto às suas preferências no âmbito da disciplina de Matemática sublinhou de forma veemente que detesta "contas de dividir" defendendo que "é muito difícil", no entanto aquilo que mais gosta são "problemas sobre áreas". Este aluno apresenta-se quase sempre com uma postura calma e ponderada, pensando cuidadosamente naquilo que vai dizer ou questionar.

O Daniel iniciou o 6.º ano de escolaridade com 10 anos de idade. Vive com os pais e um irmão mais novo. Os seus tempos livres são preenchidos com uma grande diversidade de actividades. Pratica futebol e equitação, frequenta os escuteiros e a fanfarra da freguesia onde vive. Este aluno também nunca reprovou, tal como o seu par. Concluiu o 5.º ano de escolaridade com nível 3 na maioria das disciplinas. Como disciplinas preferidas salientou a Educação Física pela mesma razão apontada pelo António e Inglês por gostar muito da forma "como o Professor dá as aulas". Ao longo do ano lectivo, foi um aluno regular, tendo obtido nível 3 na disciplina de Matemática, no final de todos os períodos. Destacou "os jogos matemáticos e exercícios com ângulos" como preferências nas aulas de Matemática. Aquilo que considera mais difícil nesta disciplina é a resolução de problemas e fundamenta a sua opinião referindo que por vezes não sabe "por onde começar". Tem uma personalidade completamente diferente do colega. É bastante extrovertido, gosta de fazer notar a sua presença e é bastante divertido. Em contrapartida é também muito distraído e desconcentra-se facilmente. Toma quase sempre a iniciativa nas aulas, adora participar, mesmo quando não o faz da maneira mais pertinente.

Enquanto par, embora com personalidades diferentes, o António e o Daniel complementam-se. Ambos preferem trabalhar em grupo, em detrimento do trabalho individual, e o António justifica essa preferência defendendo que "o colega pode notar alguma coisa que esteja mal e alerta". O António toma muitas vezes a iniciativa de chamar a atenção do colega para melhorar o seu comportamento e participar de forma adequada nas actividades que estão a ser desenvolvidas e, normalmente, o Daniel acata.

Nas sessões de exploração das tarefas, foi quase sempre o António que ficou responsável pelos registos do grupo, no entanto, houve uma interacção constante entre os dois alunos, discutindo e decidindo juntos o que iriam registar. O Daniel, mais do que o António, sentia uma enorme necessidade de validar as conclusões do grupo, junto da professora bem como da investigadora. Nas aulas em que foram implementadas as tarefas, era comum ouvi-lo dizer "stôra venha ver se está bem". Apesar do envolvimento demonstrado pelos elementos do par, não primaram pelo cuidado com a folha de resposta e pela forma como o conteúdo estava organizado. Notou-se algum esforço depois de serem alertados para esta situação mas nem sempre foram capazes de elaborar relatórios apresentáveis e bem organizados.

10.2. A exploração das tarefas

Nesta secção descreve-se o trabalho desenvolvido pelo António e pelo Daniel ao longo da experiência de ensino. É feita uma análise da forma como exploraram cada uma das tarefas propostas, focando o tipo de estratégias usadas, as dificuldades sentidas e o papel da visualização no seu raciocínio. No final da secção, apresenta-se um balanço do seu desempenho, procedendo à síntese e comparação dos dados resultantes do seu trabalho.

10.2.1. Tarefa 1 - Os lembretes da Joana

A análise do trabalho desenvolvido por estes alunos, na exploração da tarefa *Os lembretes da Joana*, permitiu observar algumas dificuldades reflectidas na aplicação de estratégias de generalização desadequadas.

Na resolução da questão *1*, este par não recorreu à representação visual dos seis lembretes. Uma vez conhecido o terceiro termo da sequência, apresentado no enunciado da tarefa, duplicaram o número de *pioneses*, utilizando deste modo a proporcionalidade directa.

> Investigadora: Expliquem-me como concluíram que eram necessários vinte *pioneses* para pendurar seis lembretes.
> Daniel: Pensamos assim […] se tivéssemos três lembretes […] em três lembretes tinha dez, então acrescentamos mais […] mais três cartões e dava vinte.
> Investigadora: Portanto, pensaram que acrescentando três lembretes iam ter mais dez *pioneses*. Foi isso?
> António e Daniel: Sim!

Os alunos consideraram que ao duplicar o número de lembretes também duplicariam o número de *pioneses*, tomando por base o termo da sequência fornecido no enunciado. Na resolução desta primeira questão da tarefa recorreram à estratégia termo unidade sem ajuste (TU_1), tendo assim utilizado uma abordagem que os conduziu a uma resposta incorrecta já que se trata de um padrão linear. Na entrevista tentou-se que analisassem a validade do seu raciocínio, através de um desenho representativo dos seis lembretes.

> Investigadora: Vamos fazer um desenho dos seis lembretes para verificar a vossa resposta?
> Daniel: Faço eu ou fazes tu? [pergunta o Daniel ao António e este acaba por fazer o desenho].
> António: [murmura enquanto desenha] … cinco… seis. Está!
> Investigadora: Então contem lá quantos *pioneses* há nesses seis lembretes.
> Daniel: [contam o número de *pioneses* muito baixinho] Dezanove!
> Investigadora: Tem dezanove?!? [age como se estivesse surpreendida] Então o que é que se terá passado?
> Daniel: [sorri] Contamos um a mais.
> Investigadora: Contaram um a mais! E porque é que isso terá acontecido?
> Daniel: Porque […] sempre na última […] no último lembrete leva sempre quatro.
> Investigadora: E nos restantes?
> António e Daniel: Três!
> António: Tenho sempre um *pionés* a ligar dois.
> Daniel: Contamos a mais […] repetimos.

A reacção dos alunos revela que a componente visual pode desempenhar um papel fundamental na validação do raciocínio e, neste contexto, na compreensão de características associadas ao padrão.

Na questão *4.1*, apesar de se manter a estrutura do questionamento e o tipo de generalização, este par mudou de estratégia tendo recorrido à representação dos seis lembretes triangulares. A opção pela contagem foi fundamentada pelos alunos pela inexistência de figuras neste enunciado, tendo assim necessidade de criar um modelo.

A proporcionalidade directa continuou a surgir no trabalho deste grupo. Para determinar o número de *pioneses* necessários para pendurar trinta e cinco lembretes rectangulares (questão *2*) usaram a estratégia termo unidade com ajuste numérico (TU_2), como se pode observar na Figura 61.

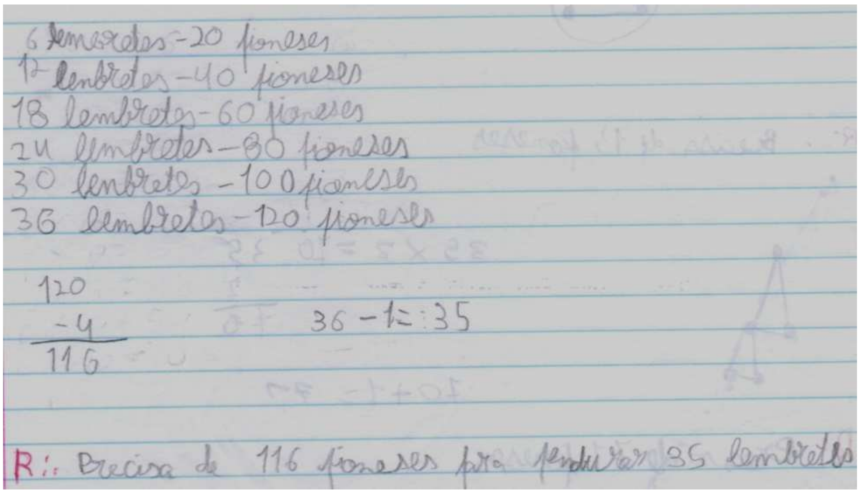


Figura 61 - Resolução da questão *2* da Tarefa 1 apresentada pelo António e pelo Daniel

Tendo já determinado o sexto termo da sequência (questão *1*), os alunos procuraram o múltiplo de seis mais próximo de trinca e cinco, utilizando um raciocínio proporcional. Após terem descoberto o número de *pioneses* necessários para pendurar trinta e seis lembretes, fizeram um ajuste para chegar ao valor pretendido. Este ajuste não teve por base as condições do problema apresentado, centrou-se apenas na utilização de propriedades numéricas.

Comparando a resolução da questão *4.2* com esta que se acabou de descrever, houve novamente uma alteração na estratégia adoptada pelos alunos. Ao invés de aplicarem a proporcionalidade directa optaram por uma estratégia explícita. Consideraram que em cada lembrete eram colocados dois *pioneses* e no último precisavam de mais um.

Esta opção relaciona-se com o facto de terem desenhado os lembretes triangulares na questão *4.1*, o que resultou numa correcta apropriação da estrutura do padrão.

> Investigadora: Como é que pensaram para descobrir o número de *pioneses* que iriam gastar em trinta e cinco lembretes triangulares?
> Daniel: Hum...
> Investigadora: Estou a ver na vossa folha que para além dos cálculos fizeram também um desenho. Porquê?
> Daniel: Íamos desenhar os trinta e cinco [lembretes] mas eram muitos.
> Investigadora: Então como pensaram?
> António: A nós deu-nos os setenta e um [*pioneses*].
> Investigadora: Sim, eu sei! Mas eu gostava de perceber como é que chegaram a esse valor.
> Daniel: Cada […] cada lembrete triangular leva dois [*pioneses*], só o último é que leva três [*pioneses*]. E por isso nós fizemos trinta e cinco vezes dois igual a setenta [35x2=70] e depois setenta mais um [*pionés*]do último lembrete, deu-nos setenta e um [70+1=71].

A construção de uma representação visual de alguns elementos da sequência, contribuiu para que os alunos identificassem a estrutura do padrão, propondo uma generalização de natureza construtiva para determinar um valor distante.

Na questão *3* este par voltou a usar a proporcionalidade directa, tal como aconteceu em todas as questões relativas à sequência dos lembretes rectangulares. Ao fazerem 30×6=180 lembretes, consideraram que 30 lembretes correspondiam a 100 *pioneses*, logo 180 lembretes corresponderiam a 600 *pioneses*, tendo assim aplicado a estratégia termo unidade sem ajuste (TU_1). Ao longo da entrevista aperceberam-se da incorrecção deste método verificando que havia *pioneses* comuns a cada dois lembretes consecutivos e portanto estariam a repetir a sua contagem.

Este grupo não apresentou qualquer resposta para a última questão da tarefa (*4.3*), alegando que tentaram fazer o desenho mas desistiram porque tinham um número muito elevado de *pioneses*. Depois de ter sido discutida uma possível resolução da questão *3*, foram capazes de aplicar a mesma estratégia correctamente, fazendo a adaptação aos lembretes triangulares.

	Estratégias de generalização					
Questões	C	TU_1	TU_2	E	NC	
1		X				Generalização Próxima
4.1	X					
2			X			Generalização Distante
3		X				
4.2				X		
4.3					X	

Figura 62 - Síntese das estratégias usadas pelo António e pelo Daniel na Tarefa 1

Analisando os dados da Figura 62 tem-se uma perspectiva global da forma como os alunos exploraram a tarefa. Verifica-se que este par nem sempre foi capaz de utilizar estratégias de generalização adequadas ao problema. Nas questões relativas à sequência de lembretes rectangulares, onde se fornecia uma representação visual do terceiro termo, os alunos transformaram a informação apresentada na figura em dados numéricos. Ao negligenciar o contexto do problema, basearam o seu raciocínio na utilização da proporcionalidade directa, quer na generalização próxima quer distante, aplicando as estratégias termo unidade sem ajuste e com ajuste numérico. No entanto, na sequência de lembretes triangulares, e na ausência de uma representação visual explícita, sentiram necessidade de proceder à construção de um modelo visual, o que pode ter contribuído para a alteração das estratégias aplicadas. Na generalização próxima utilizaram a contagem e na generalização distante recorreram a uma estratégia explícita, tendo sido bem sucedidos nos dois casos. No entanto, nesta sequência revelaram dificuldades na reversibilidade do pensamento (questão *4.3*). Apesar de na questão anterior (questão *4.2*) terem descoberto uma regra explícita que traduzia adequadamente a estrutura do padrão, não foram capazes de fazer o raciocínio inverso.

10.2.2. Tarefa 2 – *Piscinas*

À semelhança dos restantes pares, este grupo iniciou o seu trabalho fazendo uma representação visual da piscina de dimensões 10×6. Apesar de não utilizarem as cores definidas no enunciado, sombrearam os quadrados correspondentes aos azulejos azuis. Para determinar o número de azulejos de cada cor, existentes nessa piscina, procederam à contagem de cada um dos elementos. Na figura que desenharam colocaram um pontinho em cada azulejo “para não se enganarem” na contagem, tendo deste modo contado unitariamente os azulejos de cada cor.

Na questão *2*, também optaram por apresentar um modelo da piscina, no entanto esta representação possui características diferentes da utilizada na questão anterior. Neste caso, não desenharam um rectângulo com as dimensões referidas, construíram antes um mais pequeno, no qual coloriram de azul o rectângulo central e registaram em cada lado da piscina os valores que lhe estariam associados. É de destacar que a correspondência entre os dados numéricos colocados na figura e o comprimento dos lados desenhados não é coerente, facto que os alunos atribuíram à falta de atenção (Figura 63).

Na resolução da questão *2.1*, revelaram uma maior preocupação em determinar o número de azulejos azuis do que em apresentar a expressão numérica que conduziu a esse valor. Para chegar à solução, utilizaram uma estratégia explícita que não os conduziu a uma resposta correcta.

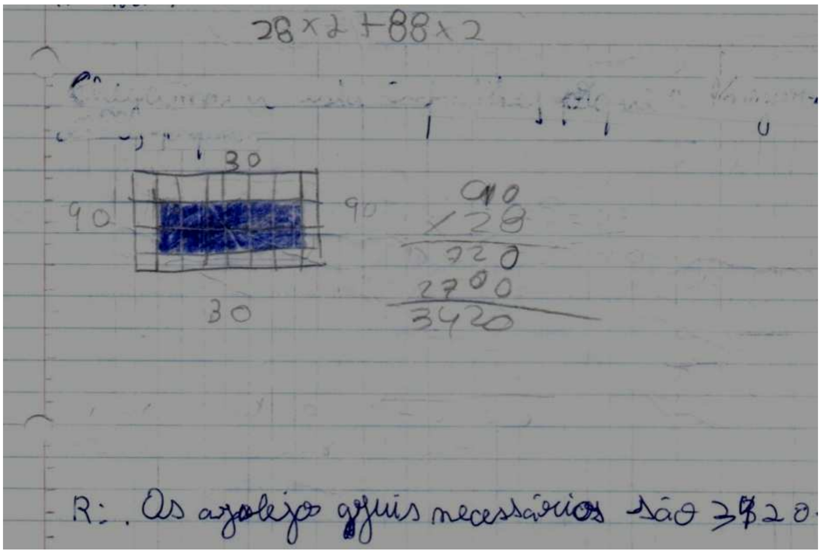


Figura 63 - Resolução da questão *2.1* da Tarefa 2 apresentada pelo António e pelo Daniel

Analisando a resolução deste par, é de salientar a apresentação de duas expressões numéricas, sem ligação aparente. A resposta a esta questão reflecte a escolha de uma destas expressões, para determinar o número de azulejos azuis, mas esta opção não é clarificada no registo escrito dos alunos. Na entrevista foi promovido um diálogo com o par acerca do trabalho desenvolvido. No que refere a esta questão, revelaram muitas dificuldades na distinção entre as dimensões da piscina e as dimensões do rectângulo azul bem como entre os conceitos de área e perímetro.

Investigadora: Para além do desenho da piscina, vocês apresentam dois cálculos [28×2+88×2 e 90×28]. E na vossa resposta dizem que os azulejos necessários são 3420 [90×28]. Expliquem-me como pensaram e que cálculos são estes.
Daniel: É […] O vinte e oito quer dizer isto [aponta para um dos lados de dimensão 30], mas sem contar estes aqui de fora [aponta para os cantos].
Investigadora: E esse valor corresponde a quê?
António: A um lado azul. Tirámos os dois da ponta.
Investigadora: E depois?
Daniel: Na largura fizemos oitenta e oito, a contar só os azuis.
António: Por isso é que é 28×2+88×2, porque são dois lados de cada.
Investigadora: E o que estão a determinar com essa expressão?
António: Os azuis.
Daniel: O lado […] A medida dos lados e […] e destes lados todos [circunda os lados referentes ao rectângulo azul].
Investigadora: Então estão a calcular o número de azulejos azuis?
Daniel: Só os que estão à volta.
Investigadora: E como calculamos todos os azulejos azuis?
Daniel: Noventa vezes vinte e oito [olha para a folha de resposta].
Investigadora: Porquê?
Daniel: [pausa] Porque é um rectângulo e é a área.
Investigadora: E quais são as dimensões desse rectângulo?
Daniel: Noventa e trinta.
António: Não! Isso é tudo! [pausa] Já dissemos, é vinte e oito e oitenta e oito por causa destes [aponta para os cantos].
Daniel: Então isto [90×28] não está bem, pois não?
Investigadora: Se achas que não está bem, como deveria ser?
Daniel: Oitenta e oito vezes vinte e oito.

Apesar de terem representado visualmente um modelo da piscina, os cálculos efectuados pelos alunos não traduzem as relações presentes na figura, deixando transparecer falta de flexibilidade entre diferentes representações do mesmo conceito.

A expressão numérica apresentada na resolução da questão *2.2* e a fundamentação que deram na entrevista, demonstram a utilização de uma estratégia explícita. Esta abordagem constitui uma generalização de natureza construtiva, já que a expressão numérica gerada tem por base a partição do conjunto de azulejos brancos.

António: Os brancos são os que estão à volta.
Investigadora: E como chegaram a esta expressão numérica? [90+90+28+28].
Daniel: Tiramos estes aqui [aponta para os cantos da figura que desenharam].
Investigadora: E porque tiraram esses?
Daniel: Porque ao fazer noventa mais noventa fica vinte e oito nos outros lados.
António: Estes [aponta para os cantos da figura que desenharam] já foram contados.

Neste caso, foram bem sucedidos na proposta que apresentaram apesar de não terem explicitado, na folha de resposta, a forma como obtiveram a expressão numérica. No entanto, foram capazes de apresentar essa fundamentação na entrevista, mostrando que a figura serviu de base ao seu raciocínio.

Tal como já tinha sucedido na tarefa anterior, não resolveram a questão associada à reversibilidade do pensamento (questão *3*). Quando questionados acerca deste facto referiram que era “muito difícil” e que “não sabiam como começar”. Na sessão de exploração da tarefa não procuraram ajuda para ultrapassar estas dificuldades, o que evidencia falta de persistência por parte do par.

	Estratégias de generalização			
Questões	C	E	NC	
1	X			Generalização Próxima
2.1		X		Generalização Distante
2.2		X		
3			X	

Figura 64 - Síntese das estratégias usadas pelo António e pelo Daniel na Tarefa 2

Na Figura 64 destacam-se as estratégias que os alunos utilizaram nos casos em que tinham de generalizar para valores próximos e distantes. Verifica-se que a contagem foi a estratégia escolhida para a generalização próxima, tendo desenhado uma figura e contado os azulejos um a um. No que refere à generalização distante (questão *2*), também recorreram a uma representação visual que deu lugar à formulação de regras explícitas mas nem sempre foram bem sucedidos, como aconteceu na resolução da questão *2.1*. Para além de terem sido observadas dificuldades na transição da representação utilizada para o contexto numérico, os alunos evidenciaram não ter ainda bem interiorizados alguns conceitos geométricos, em particular os de área e perímetro.

10.2.3. Tarefa 3 – Sequência de números

À semelhança dos restantes grupos, o António e o Daniel iniciaram a resolução desta tarefa sem qualquer dificuldade. Acrescentaram mais duas linhas à sequência dada, usando a estratégia recursiva (D_1). Na folha de resposta não registaram a sequência desde o primeiro termo, apresentaram apenas as linhas solicitadas na primeira questão da tarefa.

A explicitação da regra que lhes permitiu continuar a sequência (questão *2*) revelou-se algo complexa para este par. No entanto, durante a sessão de exploração da tarefa, não procuraram qualquer tipo de orientação particular, tendo apenas participado da discussão em grande grupo quando surgiram dúvidas em torno desta questão. Caracterizaram a regra de uma forma muito confusa, recorrendo apenas a linguagem corrente, referindo simplesmente: “chegamos à conclusão que o número seguinte está atrás mais um bocado e de forma diferente”. Ao relerem a sua resposta durante a entrevista concordaram que seria praticamente incompreensível para alguém que a lesse, fundamentando a ideia que pretendiam transmitir.

> Investigadora: Imaginem que eu não conhecia a sequência e que vocês tinham que me explicar como a poderia construir. Com a frase que escreveram eu conseguiria fazer isso?
> António e Daniel: [sorriem depois de ler] Não!
> Investigadora: Então tentem explicar melhor o que queriam dizer.
> António: Cada… cada linha tem quatro números.
> Investigadora: Mas vocês não escreveram isso.
> António: Pois não. Esquecemo-nos [bate com a mão na cabeça].
> Daniel: Na primeira linha, o primeiro número da linha está mais um bocado atrás…
> Investigadora: Atrás como?
> António: Não é atrás, é à frente!
> Daniel: Sim! Isso é na seguinte! [refere-se à segunda linha].
> António: Na segunda linha é que começa mais atrás e de forma diferente.
> Investigadora: O que é isso ‘de forma diferente’?
> António: Os números começam a andar ao contrário.

Este excerto da entrevista evidencia que os alunos compreenderam a regra que permite continuar a sequência, no entanto revelam grandes dificuldades ao nível da comunicação do seu raciocínio, quer escrita quer oral.

No dia em que resolveram a tarefa, foi notório o entusiasmo com que abordaram a terceira questão. Encararam a procura de relações numéricas na sequência como um desafio, um jogo. Cada nova descoberta era seguida de um comentário entusiástico: “já sabemos mais uma stôra”. De facto, este par conseguiu detectar uma grande diversidade de padrões, como por exemplo: na 1ª e na última coluna os números estão representados de 8 em 8; na terceira de 4 em 4; na 2ª coluna temos sempre +6, +2 e na 4ª coluna já é +2, +6; as linhas têm todas quatro números; em todas as linhas os números estão representados de 1 em 1;

Para identificarem a posição ocupada pelos números 40 (questão 4) e 81 (questão 5) usaram a estratégia recursiva (D_1). No primeiro caso, registaram todos os elementos da sequência até encontrarem 40. No entanto, para encontrarem o 81, representaram apenas os elementos da primeira coluna até obter 80 e deduziram a posição do número pretendido a partir deste. Apesar de, na resolução destas duas questões, recorrerem a uma estratégia do mesmo tipo, a segunda abordagem é menos exaustiva do que a primeira. Estas opções foram discutidas com os alunos na entrevista.

Investigadora: Como encontraram o quarenta?
Daniel: Fizemos a sequência até aparecer o quarenta.
Investigadora: Mas para encontrar o oitenta e um já não foi bem assim. Porquê?
António: Porque ia demorar mais ter que escrever tudo.
Investigadora: E porque é que usaram a primeira coluna da sequência?
António: Porque o oitenta e um tá perto do oitenta e o oitenta tá na primeira coluna.
Investigadora: Como sabiam isso?
Daniel: Porque a primeira coluna começa em oito e vai sempre de oito em oito.

A localização do número 542 revelou-se bastante mais complicada para estes alunos. Tendo verificado que as estratégias aplicadas previamente não seriam eficazes neste caso, tentaram mudar de estratégia recorrendo à tentativa e erro. No entanto, não foram capazes de chegar a uma conclusão quanto à posição deste número na sequência.

Investigadora: Vejo aqui na vossa folha que começaram a resolver esta questão mas não chegaram a nenhuma conclusão. O que aconteceu?
Daniel: Era difícil stôra! O número era grande [refere-se ao 542].
Investigadora: E que cálculos são estes que vocês apresentam [$70\times8=560$; $68\times8=544$; $67\times8=536$]?
António: Queríamos ver se era da tabuada do oito.
Investigadora: Para quê?
António: Porque assim tava na primeira coluna.
Daniel: Mas não tava. Não deu.
Investigadora: E não continuaram porquê?
António: Porque assim já não sabíamos uma maneira para saber a linha e a coluna.

Os alunos iniciaram o seu raciocínio com uma estratégia adequada. Sabendo que os múltiplos de 8 ocupam a primeira coluna, tentaram descobrir se 542 cumpria essa condição. Ao verificarem que 542 não era um múltiplo de 8 e que, desta forma, não estaria na primeira coluna, não foram capazes de propor uma estratégia alternativa para resolver o problema. Há alguns factores que podem ter estado na base destas dificuldades nomeadamente: a ordem de grandeza deste número, por comparação com o 40 e o 81; e o terem privilegiado previamente a estratégia recursiva que, neste caso, não seria uma abordagem eficaz.

	Estratégias de generalização			
Questões	D_1	E	TE	
1	X			Generalização Próxima
4	X			Generalização Distante
5.1	X	X		
5.2			X	

Figura 65 - Síntese das estratégias usadas pelo António e pelo Daniel na Tarefa 3

Pode observar-se de uma forma clara na Figura 65 que, na resolução desta tarefa, o par aplicou maioritariamente a estratégia recursiva. Nas questões em que a ordem de grandeza dos números era reduzida não sentiram qualquer dificuldade em cumprir os objectivos propostos. No entanto, a insistência num raciocínio de tipo recursivo pode ter contribuído para que não conseguissem identificar a posição ocupada por números maiores, como o caso do 542. O facto de não terem identificado na sequência relações de tipo multiplicativo pode também ter constituído um obstáculo no caso da generalização para valores distantes.

10.2.4. Tarefa 4 – A Pizzaria Sole Mio

O António e o Daniel iniciaram a resolução da tarefa logo após a leitura do enunciado. Começaram por desenhar uma mesa com 10 pizzas e dispuseram as pessoas num arranjo similar ao dos exemplos apresentados, relativos ao terceiro e quarto termos da sequência. Nesta primeira questão, recorreram à contagem para determinar o número de pessoas que estariam sentadas numa mesa com 10 pizzas.

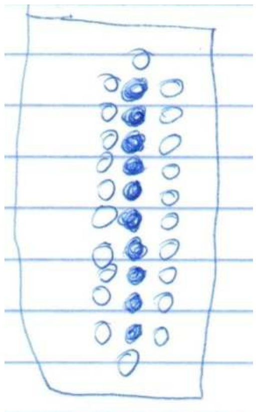


Figura 66 - Resolução da questão *1* da Tarefa 4 apresentada pelo António e pelo Daniel

Na segunda questão da tarefa, perante a generalização distante, mudaram de abordagem, optando por recorrer a uma estratégia explícita. Referiram na folha de resposta que “se há 31 pizzas tem que haver 31 pessoas de cada lado e uma em cada ponta”.

> Investigadora: Neste caso [questão *2*] já não usaram um desenho.
> António: Eram mais pizzas.
> Daniel: O desenho era maior.
> Investigadora: E então?
> António: Vimos que era sempre assim [aponta para a folha] duas pessoas nas pontas e em frente a cada pizza também temos duas.

Verificaram, neste caso, que a contagem seria um processo demorado e, em alternativa, identificaram uma regra de natureza construtiva que lhes permitiu determinar de forma imediata o número de pessoas. Esta regra serviu de base à resolução da questão *3*. Revelaram assim reversibilidade do pensamento, no entanto apresentaram uma linguagem pouco clara na sua argumentação referindo que "56 são as pessoas dos lados a dividir por dois dá 28". Durante a entrevista solicitou-se aos alunos que fundamentassem melhor o seu raciocínio.

> Investigadora: Podem explicar-me melhor como pensaram? Afinal o que significa o 56?
> Daniel: As pessoas dos lados.
> Investigadora: E o que aconteceu às que estavam nas pontas?
> Daniel: Tiramos.
> Investigadora: Porquê?
> António: Porque para saber as pizzas só precisamos das dos lados. Em cada pizza tem duas pessoas, uma em cada lado.

Este par, tal como a maioria dos restantes alunos, precisou de uma orientação de forma a compreender melhor o que se pretendia na questão *4.1*. Depois de devidamente esclarecidos, não tiveram dúvidas que estavam perante uma situação de divisão, ouvindo-se mesmo um comentário por parte do Daniel "Oh! Já sei! Aqui divide-se e vê-se onde dá mais". Foi exactamente o que apresentaram na folha de resolução. Dividiram 3 por 8 e 4 por 10 e por fim compararam os valores obtidos, concluindo que "na mesa de 10 pessoas come-se mais pizza".

Apesar de insistentemente serem prevenidos para mostrarem maior cuidado nas suas produções e fundamentarem claramente o seu raciocínio, estes alunos continuaram a revelar alguma precipitação e descuido. Na resolução da questão *4.2* limitaram-se a apresentar como resposta "mais pessoas, porque assim comia mais", sem qualquer explicação para a sua conjectura.

Investigadora: Como chegaram a esta conclusão?
António: Porque em cima [refere-se à questão *4.1*] ao convidar mais pessoas dava mais pizza para cada uma.
Investigadora: E têm a certeza que é sempre assim? Só viram estes dois casos.
[Olham um para o outro e ficam reticentes em responder].
Daniel: Podemos experimentar mais.
Investigadora: Então vamos experimentar mais casos e verificar o que acontece.
António: E que números usamos?
Investigadora: Os que vocês quiserem.
Daniel: Podemos ver estes [refere-se aos calculados nas questões *2* e *3*].
Investigadora: Pode ser!
António: Podemos usar a máquina para ser mais rápido?
Investigadora: Podem!
António: [Depois de calcular 31:64 e 28:58] Dá muito perto mas com 64 pessoas dá mais pizza que com 31.
Daniel: E do que os outros [refere-se aos casos anteriores com 8 e 10 pessoas].

O diálogo extraído da entrevista mostra que os alunos não formularam a conjectura no vazio, no entanto revelam, através da resposta dada na folha de resolução, que nem sempre acham necessário fundamentar o seu raciocínio.

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Estratégias de generalização</td><td></td></tr>
<tr><td>Questões</td><td>C</td><td>E</td><td>NC</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>X</td><td></td><td></td><td>Generalização Próxima</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>X</td><td></td><td rowspan="3">Generalização Distante</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>4.2</td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
</table>

Figura 67 - Síntese das estratégias usadas pelo António e pelo Daniel na Tarefa 4

A partir da análise da Figura 67, conclui-se que, nesta tarefa, os alunos recorreram a estratégias diferentes quando estavam perante a generalização próxima ou distante. No primeiro caso recorreram a uma generalização aritmética, através da contagem, já na generalização distante optaram por uma estratégia explícita, identificando uma regra com base no contexto do problema. Esta regra enquadra-se no âmbito da generalização de natureza construtiva, tanto na questão *2* como na *3*. Salienta-se que na última questão da tarefa a resposta dada não foi categorizada porque não apresentaram qualquer tipo de fundamentação.

10.2.5. Tarefa 5 – Dobragens

No início desta sessão, o Daniel foi dos alunos que se mostrou mais agitado. Quando foi distribuída a folha de jornal começou de imediato a perguntar para que servia e mostrou-se bastante impaciente até à leitura do enunciado. Como seria de esperar depois deste comportamento, ficou encarregue das dobragens e o António assumiu os registos. Apesar desta divisão de papéis, os alunos decidiam juntos como proceder e o que escrever na folha de resposta.

O Daniel começou então por fazer as três dobragens consecutivas e preparava-se para abrir a folha antes de efectuarem a sua previsão (questão *1*).

Investigadora: Leiam a última frase. O que é que diz aí?
Daniel: [Lê o enunciado] "Explica a tua previsão e confirma o resultado abrindo a folha".
Investigadora: Explica a tua previsão. O que quererá dizer isto?
[Os alunos não respondem]
Investigadora: Nunca ouviram falar em previsões.
António: Previsões do tempo.
Investigadora: O que é que significa prever o tempo?
António: Saber o tempo antes.
Investigadora: E neste caso? O que significa fazer uma previsão?
Daniel: Saber antes de abrir a folha.

Depois deste esclarecimento, os alunos discutiram entre si os efeitos produzidos na folha após cada dobragem e concluíram que ficaria dividida em "8 partes porque cada vez que dobramos o resultado duplica". Posteriormente confirmaram esta conjectura com a abertura da folha de jornal. Na entrevista surgiu a oportunidade de fundamentarem melhor a sua previsão.

António: Se dobrarmos a meio fica em duas.
Investigadora: Se dobrarmos a meio a folha vai ficar dividida em duas partes iguais.
António: Se dobrarmos outra vez fica em 4.
Investigadora: Fica em 4 porquê?
António: Porque multiplica.
Investigadora: Porque multiplica?!? Expliquem lá melhor.
Daniel: Ao dividir a meio corta as que estão. Ficam 4.
António: Multiplica por 2.
Investigadora: E depois?
Daniel: E depois dobra-se outra vez.
Investigadora: E o que acontece?
António: Passamos para 8. Multiplica por 2 outra vez.

A manipulação do material, através das dobragens, contribuiu para a formação de uma imagem mental relacionada com o número de partes em que a folha ficaria dividida. A partir das três dobragens que efectuaram foram capazes de estabelecer um raciocínio recursivo, identificando que a cada dobragem o número de partes duplicava.

Na exploração da questão *2*, já não recorreram ao material. Como se pode observar na Figura 68, utilizaram a regra identificada na resolução da questão anterior, aplicando deste modo a estratégia recursiva (D_1).

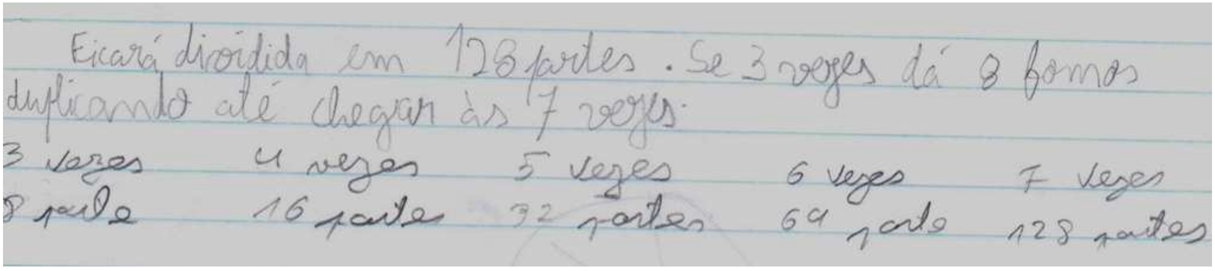


Figura 68 - Resolução da questão *2* da Tarefa 5 apresentada pelo António e pelo Daniel

Os alunos identificaram a seguinte relação entre as duas variáveis envolvidas (questão *3*): "aumentando uma dobragem duplica sempre o número de partes obtidas". Trata-se de uma regra de natureza recursiva (D_1), já que é necessário conhecer o termo anterior para se determinar o seguinte. De facto, com este tipo de regra, os alunos limitaram-se a estabelecer uma relação entre valores consecutivos da variável dependente. A análise desta questão, durante a entrevista, contribuiu para que os alunos compreendessem que a regra encontrada não contribuía para o tipo de generalização pretendida.

> Investigadora: Vamos lá pensar na relação que vocês encontraram. Se eu agora quisesse saber o que aconteceria após 8 dobragens, como fazia?
> António: 8 dobragens [...] fazíamos 128×2.
> Investigadora: E se eu agora quisesse saber o que iria acontecer depois de 100 dobragens?
> António e Daniel: 100 dobragens?
> Investigadora: Sim! Como aplicavam a vossa regra?
> [A investigadora faz uma pequena pausa para os alunos pensarem.]
> Daniel: Ui, stôra!
> Investigadora: O que foi Daniel?
> Daniel: Isso é muito! Tínhamos que fazer todos até lá!

À semelhança das questões anteriores, para resolverem a questão *4*, voltaram a utilizar a estratégia recursiva (D_1). Continuaram a tabela que tinham iniciado na questão *2*, duplicando os valores da variável dependente, até identificarem o número de dobragens correspondente a 1024 partes.

O cálculo da área de cada uma das partes obtidas nas questões *1* e *2*, não trouxe qualquer dificuldade a este par. Tendo já acesso a estes valores, limitaram-se a dividir 1 por 8 e 1 por 128, optando assim pela representação decima

	Estratégias de generalização		
Questões	C	D_1	
1	X		Generalização Próxima
2		X	Generalização Distante
3		X	
4		X	

Figura 69 - Síntese das estratégias usadas pelo António e pelo Daniel na Tarefa 5

A Figura 69 mostra, de forma clara, que a estratégia recursiva (D_1) foi privilegiada pelos alunos na resolução desta tarefa, quer em questões de generalização próxima quer distante. Embora tenham sido bem sucedidos na maioria dos casos, destaca-se a desadequação desta estratégia na resolução da terceira questão, que não poderia ser explorada de forma recursiva. À excepção da primeira questão, na qual utilizaram o material fornecido para identificar a relação entre as variáveis, nas restantes predominou o contexto numérico. Ao criarem uma imagem mental representativa do impacto de cada dobragem na folha, descobriram, simultaneamente, relações de tipo numérico que acabaram por dominar o raciocínio dos alunos nas questões seguintes.

10.2.6. Tarefa 6 – Sequências de losangos

O António e o Daniel iniciaram de imediato a resolução da tarefa. Como sempre queriam ser os primeiros a terminar e, por essa razão, as suas folhas de resposta revelavam por vezes falta de organização. Começaram por desenhar um losango de lado 4 (questão *1.1*), usando a estratégia contagem para determinar o número de peças que o constituíam.

Na segunda questão da tarefa, utilizaram um modelo visual do losango de lado 50 e determinaram o número de peças calculando o produto 50×50 (Figura 70).

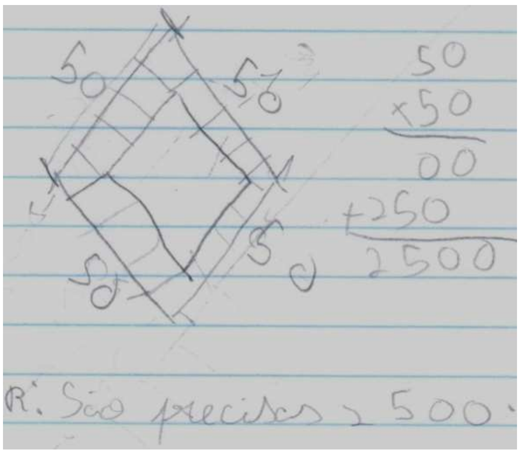


Figura 70 - Resolução da questão *1.2* da Tarefa 6 apresentada pelo António e pelo Daniel

Trata-se de uma estratégia explícita que surgiu da análise da figura construída, tal como foi confirmado na entrevista.

> Investigadora: Vocês usaram um desenho. Mas este desenho é ligeiramente diferente daquele que usaram na questão anterior porque neste caso não desenharam mesmo um losango de lado 50.
> António: Era só para ter mais ou menos uma ideia stôra. Senão era muito grande.
> Investigadora: E esse desenho ajudou?
> Daniel: Sim! Assim foi mais fácil para ver que cada fila tinha que ter 50.
> Investigadora: Expliquem melhor.
> António: As filas têm 50 pecinhas. E são 50 filas. E nós fizemos 50 vezes 50.

A regra deduzida pelos alunos teve por base uma abordagem visual e isso está patente na linguagem utilizada ao longo da entrevista, onde fazem referência à forma como se distribuem as peças pelo losango.

Na questão *2* optaram pela tentativa e erro, aliás como todos os outros grupos. Testaram diversos valores para o lado do losango até obter como resultado 324. Neste caso já não apresentaram desenhos como suporte do seu raciocínio, referindo que já não era necessário porque sabiam que era só "multiplicar lado vezes lado". Depois de determinarem o comprimento do lado do losango, não sentiram qualquer dificuldade no cálculo do perímetro do mesmo.

Na resolução da questão *3* também não usaram figuras. Para formularem as suas conjecturas, exploraram apenas dois losangos, um de lado 10 e outro de lado 30. Uma vez que apenas apresentaram cálculos foi-lhes solicitado que clarificassem o raciocínio utilizado nas questões *3.1* e *3.2*.

> Investigadora: Na questão 3 já não usaram desenhos. Porquê?
> António: Porque numa era o perímetro [refere-se à questão *3.1*] e na outra era a área e sabíamos calcular [refere-se à questão *3.2*].
> Investigadora: Expliquem-me então esses cálculos [10×4 e 30×4].
> Daniel: É o perímetro stôra.
> Investigadora: O perímetro de quê? Não está claro.
> Daniel: Do de lado 10 e do de lado 30 [refere-se aos losangos escolhidos]. Trinta é o triplo de dez.
> Investigadora: E o que concluíram quanto aos perímetros?
> António: Que aumentam três vezes mais.
> Investigadora: E para saber o que acontece com as áreas? Como pensaram?
> Daniel: Fizemos como no perímetro. Imaginamos os mesmos losangos.
> António: No de lado 10 dá 100 [refere-se à área] e no de lado 30 dá 900 [refere-se à área].
> Daniel: Aumenta nove vezes mais.

Os alunos deduziram as regras a partir do estudo de um único caso e tendo por base relações numéricas. Contrariamente ao que sucedeu nas primeiras questões da tarefa, o seu raciocínio não se sustentou na interpretação de representações visuais, tendo trabalhado exclusivamente num contexto numérico.

	Estratégias de generalização			
Questões	C	E	TE	
1.1	X			Generalização Próxima
1.2		X		Generalização Distante
2			X	

Figura 71 - Síntese das estratégias usadas pelo António e pelo Daniel na Tarefa 6

Na Figura 71 observam-se as estratégias aplicadas pelos alunos nas diversas questões da tarefa. Dependendo do tipo de generalização, verifica-se que utilizaram abordagens diferentes, todas elas adequadas às situações propostas. Na resolução da tarefa não sentiram grandes dificuldades, a não ser na interpretação do objectivo da terceira questão, tendo formulado as suas conjecturas com base no estudo de apenas um caso. A componente visual teve um peso significativo no seu raciocínio na maioria das questões, tal como se pode verificar pelas estratégias que escolheram e pelas representações visuais que utilizaram.

10.2.8. Tarefa 7 – Cubos de chocolate

O António e o Daniel iniciaram esta tarefa num clima de agitação. Após a distribuição do material que iriam usar, os alunos distanciaram-se por momentos do objectivo da tarefa, optando por fazer construções livres com os cubos de encaixe. Depois de serem alertados para a utilização adequada do material, concentraram-se no trabalho que tinha sido destinado para esta aula.

Para darem resposta à primeira questão da tarefa, procederam à construção de um cubo de aresta 3. O entusiasmo que ainda demonstravam nesta fase, levou a que cada um dos alunos construísse o seu cubo, no entanto, iam confrontando as suas conclusões acerca do número de cubos de cada tipo. Deste modo, o António e o Daniel usaram a estratégia contagem para calcular o número de cubos unitários com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate, existentes num cubo de aresta 3. Segundo os alunos, essa contagem foi efectuada termo a termo, não tendo identificado qualquer tipo de arranjo específico para cada grupo de cubos.

Investigadora: Tive oportunidade de ver que cada um construiu o seu cubo.
Daniel: [sorri] Queríamos mexer nos cubinhos stôra!
Investigadora: E depois de construir o cubo o que fizeram?
António: Contamos os cubinhos que tinha.
Daniel: Os de 0, os de 1, os de 2 e os de 3.
Investigadora: Referes-te ao número de faces de chocolate?
Daniel: Sim!
Investigadora? E como é que contaram os cubinhos? Um a um ou de outra maneira?
António: Um a um. Íamos apontando no cubo grande.

Ao abordarem a segunda questão, decidiram estudar apenas um caso, o do cubo de aresta 4, referindo que era "o que vinha a seguir". Desta vez, construíram apenas um cubo, ao contrário do que tinha sucedido na primeira questão. O Daniel ficou encarregue dessa tarefa, embora o António o tivesse auxiliado, colocando alguns cubos. Aplicaram exactamente a mesma estratégia que tinham utilizado para o cubo de aresta 3, ou seja, a contagem dos elementos um a um. No entanto, neste caso, obtiveram valores errados para o número de cubos unitários com 0 e 2 faces de chocolate. Na entrevista, tiveram acesso a um modelo do cubo de aresta 4 de forma a fundamentarem o raciocínio utilizado.

Investigadora: Vão pegar neste cubo, que é igual ao que vocês construíram, e vão-me explicar como obtiveram os valores que aparecem na vossa folha de resposta.
Daniel: [Toma a iniciativa e pega no cubo] Com 1 face temos estes daqui [aponta para uma das faces do cubo] que são 1, 2, ...
António: 4!
Daniel: E depois temos outros aqui [vai rodando o cubo e aponta para outra face] que são outros 4, e mais 4, e mais 4, e mais 4, e mais 4 [roda o cubo e aponta para as restantes faces].
Investigadora: E são...
António: [Faz os cálculos numa folha] São 24 stôra!
Investigadora: Vocês disseram que com 2 faces de chocolate têm 20. Vamos confirmar?
[O Daniel usa o mesmo processo de contagem, rodando o cubo e obtém 24 cubos]
Daniel: Dá 24?!?
Investigadora: Então já não deu 20? Vamos tentar de outra forma. Pousa o cubo na mesa para não nos perdermos e vamos contar de novo.
Daniel: [Após a contagem] É mesmo 24! Contamos mal!
Investigadora: E com 3 faces de chocolate?
António: São 8. São estes dos cantos [aponta para os vértices do cubo].
Investigadora: Muito bem! Agora só faltam os que não têm faces de chocolate.
Daniel: São os que estão dentro.
Investigadora: E quantos são?
Daniel: Podemos destapar stôra?
Investigadora: Podem.
Daniel: [Retira apenas a primeira camada de cubos] São 4!
Investigadora: De certeza? E se retirassemos a camada de baixo?
António: São mais 4 [...] Ui, erramos outra vez [bate com a mão na cabeça].

A forma como os alunos manipulam o cubo construído foi crucial na contagem e em determinados casos foi este factor que conduziu à obtenção de valores errados.

Na terceira questão da tarefa, verificaram que a estratégia aplicada anteriormente não seria eficaz neste caso porque iriam “precisar de muitos cubos e não havia”. Começaram por construir uma tabela, onde colocaram os dados referentes aos cubos de arestas 3 e 4. No entanto, esta abordagem não lhes permitiu chegar a qualquer conclusão referente ao cubo de aresta 10.

	Estratégias de generalização		
Questões	C	NC	
1	X		Generalização Próxima
2	X		
3		X	Generalização Distante

Figura 72 - Síntese das estratégias usadas pelo António e pelo Daniel na Tarefa 7

O António e o Daniel, à semelhança da maioria dos grupos, privilegiaram a contagem na resolução desta tarefa (Figura 72). Esta estratégia, adequada a questões de generalização próxima, resultou para o cubo de aresta 3 mas não para o cubo de aresta 4, devido a dificuldades relacionadas com a visualização espacial. Como não foram capazes de se abstrair do suporte concreto, não conseguiram identificar o que aconteceria no cubo de aresta 10, falhando assim a abordagem à generalização distante. Destaca-se ainda que estes alunos, normalmente não revelam cuidado na verificação dos resultados, facto que teria sido determinante na questão *2*, através do cálculo do volume do cubo de aresta 4.

10.2.8. Síntese da exploração das tarefas

Após a análise detalhada do trabalhado desenvolvido pelo António e pelo Daniel, ao longo da experiência de ensino, apresenta-se uma síntese centrada em aspectos como as estratégias de generalização privilegiadas, dificuldades sentidas e o papel da visualização no seu raciocínio.

10.2.8.1. Estratégias de generalização

Ao longo da fase de exploração das tarefas propostas, o António e o Daniel utilizaram as estratégias de generalização destacadas na categorização adoptada neste estudo, nomeadamente: contagem, termo unidade, diferença, explícita e tentativa e erro. Das estratégias destacadas, a contagem, a termo unidade e a diferença foram utilizadas tanto na generalização próxima como distante, já as estratégias explícita e tentativa e erro apenas surgiram na resolução de questões conducentes a uma generalização distante. Na maioria das tarefas, embora não seja um número expressivo, adoptaram abordagens diferentes dependendo do tipo de generalização pretendida.

Na resolução de questões de generalização próxima privilegiaram a contagem, salientando-se apenas duas tarefas onde recorreram às estratégias termo unidade sem ajuste (TU_1) e recursiva (D_1). Por um lado, na primeira questão da tarefa *Os lembretes da Joana* determinaram o 6º termo da sequência utilizando a proporcionalidade directa, tendo aproveitado o facto de conhecerem o 3º termo. E na tarefa *Sequência de números*, continuaram a sequência apresentada, com base num raciocínio recursivo, tendo identificado a variação constante entre termos consecutivos, posicionados por linha.

No que refere à generalização distante, apresentaram uma maior diversidade de estratégias, apesar de terem revelado preferência pela estratégia explícita. Analisando o trabalho desenvolvido pelo António e pelo Daniel, neste tipo de questões, verifica-se que apenas não recorreram à contagem, tendo optado, com maior ou menor frequência, pelas estratégias: termo unidade, diferença, explícita e tentativa e erro. Na maior parte das tarefas, a generalização distante foi motivada por questões em que, conhecida a ordem, se pretendia descobrir o respectivo termo e outras onde era potenciada a reversibilidade do pensamento, pedindo-se a ordem relativa a um dado termo da sequência. Considerando o conjunto das respostas categorizadas, em tarefas deste tipo, conclui-se que os alunos não demonstraram coerência nas estratégias aplicadas quando passam de um tipo de questão para o outro. Em determinadas situações mudam de abordagem, como se verifica nas tarefas *Os lembretes da Joana* e *Sequência de losangos*, e noutras aplicam estratégias similares nos dois tipos de questões, como se pode observar nas tarefas *A Pizzaria Sole Mio* e *Dobragens*. Acrescenta-se ainda que, por vezes, utilizaram estratégias que não seriam esperadas na resolução de questões de generalização distante, em particular a recursiva: na tarefa *Sequência de números*, continuaram a sequência para identificar termos localizados numa posição distante; e na tarefa *Dobragens*, utilizaram o mesmo procedimento para descobrir o número de dobragens necessárias para que a folha ficasse dividida em 1024 partes iguais.

10.2.8.2. Dificuldades emergentes do trabalho dos alunos

Durante a experiência de ensino, o António e o Daniel demonstraram dificuldades na resolução de algumas tarefas. Os erros cometidos estão maioritariamente associados a questões que implicam a generalização distante, no entanto, nem sempre foram bem sucedidos na descoberta de termos próximos.

Na tarefa *Os lembretes da Joana*, utilizaram indevidamente a proporcionalidade directa, tanto na generalização próxima como distante. Para identificar determinados termos da sequência, calcularam múltiplos de termos conhecidos, sem ajustar contextualmente o resultado, o que constitui uma abordagem desadequada quando se está perante padrões de tipo linear, como é o caso deste. O facto de terem trabalhado maioritariamente num contexto numérico, aliado ao facto de os números propostos serem apelativos (Sasman, Olivier & Linchevski, 1999), do ponto de vista multiplicativo, podem ter conduzido a este tipo de raciocínio.

Salientam-se ainda algumas tarefas nas quais os alunos não foram capazes de estruturar uma resposta para determinar termos distantes, nomeadamente as tarefas *Sequência numérica e Cubos de chocolate*. A incapacidade de identificar uma regra representativa do padrão em causa, pode estar relacionada com a fixação por estratégias utilizadas na resolução das questões anteriores e das quais não conseguiram libertar-se, respectivamente, a recursiva e a contagem. Apesar de serem abordagens úteis e adequadas à generalização próxima, não tendem a contribuir para a descoberta da estrutura do padrão. A ausência de resposta também foi notória em situações promotoras da reversibilidade do pensamento, em particular nas tarefas *Os lembretes da Joana* e *Piscinas*.

De entre as sete tarefas exploradas, aquelas em que revelaram maior insucesso foram *Os lembretes da Joana* e *Cubos de chocolate*. A primeira tem subjacente um padrão de tipo linear, e os alunos adoptaram estratégias de resolução incorrectas, baseadas na utilização de um modelo proporcional. No segundo caso, a tarefa tem subjacente a descoberta de padrões maioritariamente de tipo não linear.

10.2.8.3. Papel da visualização no desempenho dos alunos

Nas questões de generalização próxima, o António e o Daniel privilegiaram claramente uma estratégia de natureza visual, a contagem. Na maioria das tarefas, esta estratégia foi eficaz na descoberta de termos próximos. Os alunos construíam representações visuais dos termos pretendidos e procediam a uma contagem um a um dos elementos que os constituíam. Salienta-se, no entanto, que na tarefa *Cubos de chocolate*, a aplicação desta estratégia ao estudo do cubo de aresta 4, não lhes permitiu identificar correctamente o número de cubos unitários com 0 e 2 faces de chocolate, possivelmente por terem optado por uma contagem não organizada de cada um dos cubos. Nunca utilizaram a estratégia contagem na resolução de questões de generalização distante, reconhecendo que se trataria de um processo demasiadamente exaustivo nestes casos.

No âmbito da generalização distante, também optaram maioritariamente por uma estratégia de natureza visual, a explícita, embora não se note uma predominância significativa desta abordagem no trabalho dos alunos. Surgiram outras estratégias, de tipo não visual, nomeadamente: termo unidade sem ajuste (TU_1); termo unidade com ajuste numérico (TU_2); recursiva (D_1); e tentativa e erro. A utilização da estratégia explícita conduziu quase sempre à obtenção de respostas correctas, à excepção da questão *2.1* da tarefa *Piscinas*. Entre as abordagens numéricas, destaca-se a utilização errónea da proporcionalidade directa, na resolução da tarefa *Os lembretes da Joana*, através da aplicação da estratégia termo unidade. Se os alunos tivessem verificado, já na generalização próxima, a validade do seu raciocínio, utilizando um desenho, teriam concluído que aquele modelo não se aplicava ao contexto do problema em causa. Este facto é fundamentado pela reacção dos alunos à ausência de uma representação visual dos lembretes triangulares. Optaram por modelar esta situação com um desenho que lhes permitiu reconhecer a estrutura do padrão e posteriormente deduzir uma estratégia explícita.

Para além de terem sido identificadas dificuldades associadas à utilização de um contexto puramente numérico e, consequentemente, à não atribuição de significado às variáveis manipuladas, também se atribuem alguns erros ao nível de compreensão de certos conceitos geométricos e com o nível de desenvolvimento de capacidades de visualização espacial. Notou-se que os conceitos de área e perímetro nem sempre foram correctamente utilizados, condicionando a adequação das estratégias aplicadas, por exemplo na tarefa *Piscinas*. Na tarefa *Cubos de chocolate*, verificou-se ainda que as capacidades de visualização espacial não estão totalmente desenvolvidas, tendo originado limitações ao nível do raciocínio dos alunos, impedindo-as de atingir um grau de abstracção que lhes permitisse formular regras que relacionassem as variáveis dependente e independente.

CAPÍTULO 11

TURMA B

Neste capítulo são descritas algumas das principais características da turma B, bem como o ambiente em que decorreu a experiência de ensino, de forma a compreender de uma forma mais aprofundada o trabalho desenvolvido por esta turma. Começa-se por salientar aspectos associados ao contexto escolar e às vivências dos alunos, focando pontos relevantes para a compreensão de determinadas reacções e do seu desempenho ao longo do estudo. Faz-se ainda referência aos resultados dos alunos na primeira aplicação do teste que são posteriormente analisados comparativamente com os resultados do pós-teste. São também descritos alguns dos episódios mais relevantes das sessões de exploração de cada uma das sete tarefas propostas, no decurso da experiência de ensino. Ao longo do capítulo são apresentadas evidências, baseadas no trabalho dos alunos, referentes a estratégias de generalização utilizadas, dificuldades emergentes, assim como ao papel da visualização no seu desempenho.

11.1. Caracterização geral

Os alunos da turma B frequentavam uma escola básica integrada, de uma freguesia do distrito de Viana do Castelo. A população afecta a esta freguesia apresenta um nível socioeconómico médio/baixo. A economia do meio assenta principalmente em empresas de pequena dimensão da área da construção civil e confecção de vestuário, no pequeno comércio e em oficinas de carácter familiar. O sector terciário é pouco representativo na economia local, embora se tenha notado algum crescimento nos últimos anos.

Esta turma era constituída por 18 alunos, oito do sexo feminino e dez do sexo masculino. A maioria destes alunos residia em zonas limítrofes à escola, deslocando-se para a escola principalmente a pé. As habilitações académicas dos pais correspondiam maioritariamente ao 6.º ano de escolaridade e as suas profissões integravam essencialmente o sector secundário.

No início do estudo, as idades destes alunos variavam entre os 10 e os 12 anos e todos tinham pertencido à mesma turma no ano lectivo anterior. Apesar de estarem a frequentar o 6.º ano de escolaridade pela primeira vez, dois dos alunos tinham tido retenções no 1.º ciclo do ensino básico, um deles no 2.º ano e o outro no 4.º ano. O aproveitamento da turma no final do 5.º ano de escolaridade foi considerado satisfatório pelos professores, os quais no entanto salientaram a heterogeneidade do grupo neste aspecto.

Na sua maioria, os alunos desta turma apresentavam algumas carências, quer afectivas quer económicas, no entanto eram caracterizados pelos seus professores como um grupo humilde e afável, de agradável convivência e fácil de conquistar por iniciativas curriculares e extracurriculares. Eram considerados, de uma forma geral, dinâmicos e empreendedores, facto comprovado pela quantidade de alunos que aderia a actividades extracurriculares, tais como: visitas de estudo; palestras; conferências; e iniciativas associadas ao desporto escolar. Neste âmbito, destaca-se ainda o envolvimento de quase todos os elementos da turma em duas actividades extracurriculares, promovidas pela escola e dinamizadas por professores: o Laboratório de Matemática e o Clube de Línguas. Não havia qualquer carácter de obrigatoriedade nestas actividades, no entanto os alunos foram bastante assíduos, participando com grande entusiasmo e interesse.

Relativamente à Matemática, oito dos alunos desta turma consideravam-na a disciplina em que sentiam mais dificuldades e sete destacavam a Matemática como a sua disciplina preferida, sendo que uma das justificações mais frequente foi "gosto muito das aulas do professor". Quando questionados acerca do que mais gostavam de fazer nas aulas desta disciplina, a maioria destacou "as contas" e aspectos relacionados com a geometria, como o cálculo de áreas e perímetros. Em contrapartida, "os problemas" e, para alguns, "contas com números com vírgulas" eram a parte mais difícil da Matemática.

Embora houvesse alguns alunos na turma com muitas dificuldades na disciplina de Matemática, todos mantinham uma relação de afectividade e proximidade com o professor. O facto de já se conhecerem do ano lectivo anterior contribuía para o clima de estabilidade e para o bom ambiente que se vivia na sala de aula.

Os alunos reagiram de forma muito positiva à proposta de participação neste estudo, tal como era habitual na turma, aceitando prontamente integrar este projecto. Na fase de apresentação do estudo, o interesse e a curiosidade levaram os alunos a colocar diversas questões acerca do seu papel na investigação, nomeadamente se poderiam ver os registos de vídeo, quais os alunos que seriam entrevistados, entre outras.

11.2. Desempenho dos alunos no pré-teste

O teste (Anexo A) foi aplicado pela primeira vez no início do ano lectivo e possibilitou a recolha de dados de natureza quantitativa e qualitativa. As respostas dos alunos foram classificadas através da aplicação da escala de avaliação (Anexo B), o que permitiu obter indicadores quantitativos do seu desempenho na resolução de problemas com padrões. Os resultados do teste foram ainda analisados numa perspectiva qualitativa, de forma a identificar as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos, dificuldades evidenciadas, bem como a influência da visualização no seu raciocínio. Desta forma, considera-se fundamental analisar estes dados de um ponto de vista integrador, conjugando as componentes quantitativa e qualitativa.

Na Tabela 30 apresentam-se os resultados globais da turma B, na primeira aplicação do teste, no que respeita às médias, bem como à identificação das classificações mínima e máxima, para cada uma das questões.

Tabela 30 - Resultados globais do pré-teste - Turma B

Questão	Média	Mínimo	Máximo
1.1	1,78	0	4
1.2	3,28	0	4
1.3	3,44	1	4
1.4	2,72	0	4
1.5	3,28	0	4
1.6	0,83	0	4
1.7	3,44	0	4
1.8	2,33	0	4
1.9	3,22	0	4
1.10	4,00	4	4
1.11	2,17	0	4
1.12	2,22	0	4
1.13	0,89	0	4
1.14	2,11	0	4
1.15	1,06	0	3
1.16	2,89	0	4
2.1	0,61	0	4
2.2	0,39	0	4
2.3	0,06	0	1
3.1	0,61	0	2
3.2	0,50	0	2

O teste era constituído por três tarefas distintas, nomeadamente, uma série de questões nas quais os alunos deveriam indicar os dois termos seguintes de diferentes sequências e, de seguida, dois problemas envolvendo a generalização próxima e distante. Optou-se por analisar os resultados dos alunos em cada uma das tarefas do teste, relacionando-os com: o tipo de estratégias utilizadas; questões em que evidenciaram maiores dificuldades; e o papel da visualização no seu desempenho.

11.2.1. Tarefa 1 – Continuar sequências

Na primeira tarefa do teste eram apresentadas dezasseis sequências, de repetição e de crescimento, que os alunos deveriam continuar, indicando os dois termos seguintes. Tratando-se de questões de resposta fechada, não foram objecto de análise no que refere à categorização das estratégias de generalização. No entanto, o trabalho apresentado pelos alunos, nesta primeira implementação do teste, tornou possível a identificação de algumas dificuldades assim como de algumas evidências relacionadas com o impacto das representações visuais no seu raciocínio.

Como já foi referido, nesta tarefa do teste, os alunos tinham de dar continuidade a padrões de repetição e de crescimento, em diferentes contextos. Analisando os resultados apresentados na Tabela 30, pode-se constatar que estes alunos exibem uma maior taxa de sucesso nos padrões de repetição (questões *1.7*, *1.10* e *1.16*) do que nos de crescimento, embora se observem várias sequências de crescimento nas quais os alunos obtiveram bons resultados. Esta diferença pode indicar uma maior experiência com padrões de repetição ou porventura que os padrões de crescimento são cognitivamente mais complexos, o que constitui uma questão pertinente, dado que os padrões de crescimento são tradicionalmente utilizados para estabelecer a ponte entre a aritmética e a álgebra.

Ainda neste âmbito, foram identificados alguns casos em que, embora não se pretendesse sugerir essa regra com os termos apresentados no enunciado, o padrão foi interpretado pelos alunos como sendo de repetição, tanto em sequências visuais como não visuais. Esta situação foi mais evidente no prolongamento da sequência relativa à questão *1.15*, na qual estes alunos indicaram como termos seguintes o triângulo e o quadrado, ao invés de aumentarem o número de lados dos polígonos. Registaram-se ainda outros casos em que, em vez de utilizarem a lei de formação identificada nos termos apresentados, repetiram a variação observada ou então a variação ocorrida entre os últimos dois termos.

A sequência da questão *1.6*, relativa aos quadrados perfeitos, reflecte esta dificuldade. Após concluírem que a variação entre os termos consecutivos apresentados era +3, +5, +7, alguns alunos repetiram esta variação de forma a determinar os dois termos seguintes, fazendo +3 e depois +5. Por outro lado, houve ainda alguns alunos que repetiram a variação ocorrida entre os últimos termos apresentados no enunciado, adicionando sempre 7 unidades, a partir do 16.

Como se pode observar na Tabela 30, em média, os alunos evidenciaram piores resultados no prolongamento de sequências maioritariamente visuais (questões *1.1*, *1.13* e *1.15*), destacando-se apenas uma em contexto numérico (questão *1.6*). Nas sequências dos números triangulares (questão *1.1*) e dos *Z's* (questão *1.13*) revelaram dificuldades relacionadas com a representação dos termos que se seguiam. No primeiro caso a maioria não conseguiu compreender a distribuição dos pontos que constituíam cada triângulo e no segundo caso, por norma, faziam variar apenas uma das dimensões da figura, normalmente a altura.

11.2.2. Tarefa 2 – Problema das missangas

A segunda tarefa do teste envolvia a exploração de um padrão linear crescente, sendo apresentadas no enunciado as representações visuais dos dois primeiros termos da sequência, um colar com uma flor e um colar com duas flores. As questões formuladas ao longo da tarefa tinham como principal objectivo promover a generalização próxima (questões *2.1* e *2.*2) e a generalização distante (questão *2.3*).

Na Tabela 31 são apresentadas as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos da turma B, na resolução desta tarefa, tendo por base a categorização adoptada neste estudo.

Tabela 31 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma B no problema 2 do pré-teste

Questões	**C**	TU_1	TU_2	TU_3	**TU**	D_1	D_2	D_3	**D**	**E**	**TE**	NC
2.1	**5**	8	-	-	**8**	2	-	-	**2**	**-**	**-**	3
2.2	**2**	9	-	1	**10**	1	-	-	**1**	**-**	**-**	5
2.3	**1**	9	-	1	**10**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	7

A estratégia mais utilizada pelos alunos foi a termo unidade. A maioria optou por considerar múltiplos de termos conhecidos da sequência (TU_1), tanto nas questões de generalização próxima como distante. No entanto, esta abordagem não se adequa a padrões de tipo linear, já que tem por base um raciocínio proporcional, tendo conduzido os alunos a respostas incorrectas. Para que a estratégia termo unidade se adeqúe a um padrão com esta estrutura, seria necessário efectuar um ajuste do resultado, após serem calculados múltiplos de determinados termos da sequência, utilizando desta forma a estratégia TU_3. Apenas um aluno recorreu a esta abordagem na resolução das questões *2.2* e *2.3*. Como se observa na Figura 73, para determinar o número de missangas de cada cor, num colar com 8 flores, começou por considerar as flores como sendo disjuntas, replicando 8 vezes o número de missangas correspondentes a uma flor. Posteriormente ajustou o resultado eliminando as missangas que se iam sobrepondo, ou seja as centrais. Este aluno utilizou a mesma abordagem para determinar o 25º termo da sequência, tendo feito o ajuste com base no contexto do problema.

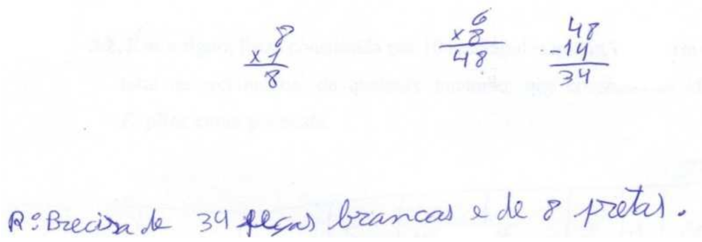


Figura 73 - Resolução da questão *2.2* do teste utilizando TU_3 – Turma B

Para além da estratégia termo unidade, surgiram ainda a contagem e a recursiva (D_1). Alguns alunos recorreram a um desenho para resolver as questões propostas na tarefa, contando posteriormente o número de missangas de cada cor, presentes nas representações efectuadas. Analisando a Tabela 31, é notório que, à medida que a ordem dos termos aumenta, a frequência de utilização desta estratégia tende a diminuir. A estratégia recursiva (D_1) não foi uma abordagem muito utilizada, ao contrário do que seria de esperar, dado tratar-se de um padrão linear (e.g. Lannin, Barker & Townsend, 2006; Noss, Healy & Hoyles, 1997; Orton & Orton, 1999). Os alunos que optaram por esta estratégia aplicaram-na na resolução das duas primeiras questões, depois de terem identificado que cada flor acrescentada contribuía com mais uma missanga preta e quatro brancas. Na terceira questão da tarefa desistiram desta abordagem, possivelmente por se tornar demasiadamente exaustiva.

Observando as estratégias utilizadas pelos alunos, destaca-se a ausência das estratégias explícita e tentativa e erro. Apesar de as figuras apresentadas no enunciado serem transparentes (Sasman, Olivier & Linchevski, 1999), nenhum aluno conseguiu identificar uma regra que relacionasse o número de flores com o número de missangas de cada cor.

Embora o problema tivesse uma forte componente visual, analisando o número de respostas por categoria (Tabela 31), conclui-se que os alunos privilegiaram estratégias de natureza não visual (TU_1 e D_1). No entanto, para além de estudar as preferências dos alunos no que refere ao tipo de raciocínio utilizado, é também pertinente analisar a adequação de cada uma das abordagens utilizadas na resolução da tarefa (Figura 74).

	Estratégias visuais (%)				Estratégias não visuais (%)				
	C	TU_3	D_3	E	TU_1	TU_2	D_1	D_2	TE
2.1	40	-	-	-	0	-	100	-	-
2.2	0	100	-	-	0	-	100	-	-
2.3	0	100	-	-	0	-	-	-	-

Figura 74 - Eficácia de cada estratégia na resolução do problema 2 – Turma B

No que refere às estratégias visuais aplicadas pelos alunos, apenas TU_3 se revelou eficaz em todas as situações em que foi aplicada. Já a contagem, nem sempre foi utilizada de forma adequada, verificando-se um aumento do nível de insucesso, à medida que os alunos progrediam para a generalização distante. A representação de termos desta sequência mostrou-se bastante complexa para alguns alunos que efectuaram desenhos que não obedeciam às condições do enunciado, condicionando desta forma a contagem. Das estratégias não visuais, apenas a recursiva se adequou a este contexto.

Os resultados apresentados na Tabela 30 sugerem que os alunos desta turma sentiram muitas dificuldades na resolução desta tarefa, tendo-se traduzido numa taxa de insucesso bastante elevada. É ainda evidente que estas dificuldades foram aumentando à medida que a ordem do termo pretendido se ia tornando maior. A utilização de abordagens exclusivamente numéricas pode fundamentar alguns dos erros cometidos, já que grande parte dos alunos se centrou na manipulação de números sem lhes atribuir significado, culminando na utilização de estratégias desadequadas.

11.2.3. Tarefa 3 – Problema dos rectângulos

À semelhança da tarefa anterior, no *Problema dos rectângulos*, os resultados obtidos pelos alunos foram igualmente baixos (Tabela 30). Neste caso, não conseguiram traduzir para números o contexto que lhes foi apresentado, o que fundamenta a predominância da estratégia contagem, como se pode observar na Tabela 32, onde se apresentam as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos. Este insucesso tornou-se ainda maior com o aumento da ordem do termo na questão *3.2*.

Tabela 32 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma B no problema 3 do pré-teste

Questões	**C**	TU_1	TU_2	TU_3	**TU**	D_1	D_2	D_3	**D**	**E**	**TE**	NC
3.1	**10**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	8
3.2	**8**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	10

Em geral, os alunos desenharam a figura pretendida ou, no caso da questão *3.1*, utilizaram a figura fornecida no enunciado e identificaram rectângulos de diferentes dimensões, contando-os um a um. Na segunda questão desta tarefa, grande parte dos alunos recorreu a um suporte visual para efectuar a contagem dos rectângulos, já que nesta alínea a figura não era fornecida. Alguns destes alunos encontraram vários rectângulos mas, uma vez que não utilizaram um raciocínio organizado, não conseguiram identificar todos os rectângulos. A maioria referiu apenas os rectângulos de menor dimensão e o de maior dimensão, possivelmente influenciados pelo exemplo apresentado no enunciado. O que daqui se destaca é o facto de, apesar de terem recorrido à representação dos rectângulos, nenhum dos alunos ter sido capaz de identificar o padrão que permitia determinar o número total de rectângulos.

	Estratégias visuais (%)				Estratégias não visuais (%)				
	C	TU_3	D_3	E	TU_1	TU_2	D_1	D_2	TE
3.1	0	-	-	-	-	-	-	-	-
3.2	0	-	-	-	-	-	-	-	-

Figura 75 - Eficácia de cada estratégia na resolução do problema 3 – Turma B

A partir da Tabela 32 observa-se que os alunos privilegiaram de forma clara uma estratégia de natureza visual, nomeadamente a contagem. No entanto nenhum conseguiu determinar o número total de rectângulos, uma vez que não identificaram uma forma organizada de utilizarem esta estratégia, tendo apenas identificado alguns dos rectângulos.

11.2.4. Síntese dos resultados do pré-teste

Após a primeira aplicação do teste pode concluir-se que os alunos evidenciaram maiores dificuldades na resolução de problemas contextualizados, envolvendo a generalização próxima e distante, do que na continuação de sequências (Tabela 30). Esta situação poderá estar relacionada com o facto de as tarefas de continuar ou completar sequências serem mais frequentes nas aulas de Matemática do que os problemas apresentados nas questões *2* e *3* do teste. No entanto, na continuação de sequências, verificou-se que os alunos revelaram maiores dificuldades na exploração de padrões de crescimento do que de repetição e também em continuar sequências visuais, o que pode indicar que as suas capacidades numéricas superam as visuais ou que nas aulas de Matemática a componente visual não foi privilegiada.

Os resultados dos alunos nas duas últimas tarefas do teste foram muito baixos, tendo piorado à medida que progrediam para a generalização distante. Este insucesso deve-se essencialmente à utilização de estratégias desadequadas. No que refere às estratégias visuais, destaca-se a forma como utilizaram a contagem que, sendo aplicada de forma desorganizada, pode não ser útil na descoberta da estrutura do padrão ou até mesmo conduzir os alunos a respostas incorrectas. No caso das estratégias não visuais, verificou-se que, a manipulação de números sem lhes atribuir significado no contexto do problema, pode culminar na utilização de abordagens que não se adequam à estrutura do padrão em causa, como a proporcionalidade directa.

Destaca-se ainda a ausência das estratégias tentativa e erro e explícita no trabalho dos alunos, especialmente a última já que é de extrema utilidade na resolução de questões de generalização distante, permitindo de uma forma directa relacionar as variáveis dependente e independente.

11.3. A exploração das tarefas

Nas sessões de exploração das tarefas, os alunos trabalharam em pares, metodologia que não era utilizada de forma frequente nas aulas de Matemática, apesar de estarem sentados dois a dois. Ao longo destas sessões, notou-se que foram gradualmente interiorizando hábitos de trabalho colaborativo, partilhando materiais e discutindo as suas ideias antes de efectuar o registo. Nesta secção é feita uma análise do trabalho desenvolvido pelos alunos desta turma, durante a experiência de ensino, apresentando-se uma descrição detalhada de alguns dos episódios mais relevantes de cada tarefa.

11.3.1. Tarefa 1 - Os lembretes da Joana

A tarefa *Os lembretes da Joana* (Anexo C) foi a primeira desenvolvida pela turma, no âmbito deste estudo, e foi proposta em Outubro de 2006, numa aula de Matemática de 90 minutos. Sendo esta a primeira tarefa implementada, após a leitura do enunciado, houve necessidade de realçar algumas questões fundamentais para o trabalho que se seguia, nomeadamente, a importância da cooperação entre os pares e a possibilidade de explicitarem o seu raciocínio através de diversos tipos de representações. Tal como na turma A, a referência ao desenho como uma forma de fundamentação das respostas, suscitou alguma estranheza nesta fase inicial. O professor interveio e explicou aos alunos que, embora nas aulas não recorressem muitas vezes aos desenhos, estes constituem "uma alternativa tão importante e tão válida quanto os números ou mesmo as palavras". Depois dos devidos esclarecimentos, os grupos iniciaram o seu trabalho, relendo as questões uma a uma. Foi notória a interacção entre os elementos da maioria dos pares, discutindo como iriam resolver cada uma das questões e quem ficaria encarregue dos registos.

O acompanhamento do trabalho dos alunos, ao longo da sessão, permitiu concluir que, apesar de terem feito um esforço no sentido de explicitar o seu raciocínio, evidenciaram algumas dificuldades na fundamentação de determinadas questões. Houve mesmo alguns grupos que não conseguiram concluir a tarefa devido ao tempo que perderam na justificação das suas respostas, experimentando primeiro numa folha de rascunho.

Outra situação de destaque prende-se com a falta de um modelo visual na situação problemática apresentada na questão *4*. No caso dos lembretes rectangulares foi dada a representação do 3º termo da sequência, para exemplificar a forma como eram pendurados, já nos triangulares apenas se descreveu a distribuição dos lembretes e dos respectivos *pioneses*. Grande parte dos alunos salientou a falta da representação visual nesta situação, mostrando algumas dificuldades ao nível da interpretação, tendo-se por isso optado por alargar a discussão à turma para clarificar esta questão.

> Catarina: Stôra, aqui não tem desenho [refere-se à questão *4*]!
> Investigadora: E será que precisamos?
> Rita: Sim, como na outra dos rectângulos.
> Investigadora: [Depois de reler o enunciado] Vamos lá ver. Como são estes lembretes?
> Alunos: Triângulos!
> Investigadora: Então têm que imaginar lembretes triangulares em vez de rectangulares. E os pioneses? Como estarão distribuídos?

Tânia: Em cada ponta do triângulo tem um.
Catarina: E no seguinte sobrepõe.
Investigadora: Penduram-se de forma parecida à dos lembretes rectangulares só que neste caso temos outra figura geométrica.

Após este esclarecimento, cinco dos pares desta turma optaram por construir um modelo visual dos lembretes triangulares, no entanto notou-se que sentiram maiores dificuldades com este tipo de representação do que com a representação dos lembretes de formato rectangular, maioritariamente devido ao desenho das sobreposições.

A partir da análise das folhas de resposta dos alunos, construiu-se a Tabela 33 que contempla as estratégias de generalização utilizadas na resolução de cada uma das questões da tarefa.

Tabela 33 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma B na Tarefa 1

Questões	***C***	*TU_1*	*TU_2*	*TU_3*	***TU***	*D_1*	*D_2*	*D_3*	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1	**7**	2	-	-	**2**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	-
2	**-**	2	1	-	**3**	-	-	-	**-**	**6**	**-**	-
3	**-**	2	1	-	**3**	-	2	2	**4**	**2**	**-**	-
4.1	**5**	2	-	-	**2**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	2
4.2	**-**	2	2	-	**4**	-	-	-	**-**	**3**	**-**	2
4.3	**-**	2	-	-	**2**	-	2	1	**3**	**1**	**-**	3

Nas questões de generalização próxima (*1* e *4.1*) aplicaram estratégias como a contagem e termo unidade sem ajuste (TU_1), tendo predominado a primeira. A maioria dos grupos optou por desenhar 6 lembretes, rectangulares ou triangulares, e os respectivos *pioneses*, procedendo posteriormente à sua contagem.

No que refere à generalização distante (*2*, *3*, *4.2* e *4.3*), utilizaram uma maior diversidade de estratégias, nomeadamente: termo unidade sem ajuste (TU_1) e com ajuste numérico (TU_2); múltiplo da diferença sem ajuste (D_2) e com ajuste (D_3); e explícita. Ao contrário do que sucedeu no estabelecimento da generalização próxima, no caso da identificação de termos mais distantes, não se identificou uma estratégia que se destacasse perante as restantes, tendo havido variações ao longo das questões referidas, tal como se pode observar na Tabela 33.

Nesta tarefa são identificados pares de questões com o mesmo tipo de formulação, mudando apenas o contexto dos lembretes rectangulares para triangulares (*1* e *4.1*; *2* e *4.2*; e *3* e *4.3*). Analisando paralelamente as respostas dos alunos a estas questões, constata-se que a maioria manteve o tipo de abordagem utilizada, registando-se poucos casos em que isso não se verificou.

Na exploração da generalização distante, surgiram diferentes expressões numéricas, resultantes da forma como os alunos *viram* o padrão. Na Figura 76 são apresentadas as abordagens identificadas bem como o número de grupos que as utilizaram. Em qualquer um dos casos, a generalização estabelecida por estes alunos é de natureza construtiva (Rivera & Becker, 2008), resultando da decomposição da estrutura do padrão em componentes disjuntas.

	Expressão numérica	Natureza da generalização	N.º de pares de alunos
Questão *2*	35×3+1	Construtiva	2
	34×3+4	Construtiva	4
Questão *3*	(600–4)÷3+1	Construtiva	1
	600÷3–1	Construtiva	2
Questão *4.2*	35×2+1	Construtiva	2
	34×2+3	Construtiva	1
Questão *4.3*	600÷2–1	Construtiva	1

Figura 76 - Natureza da generalização utilizada pelos alunos da turma B na Tarefa 1

Na Figura 76 foram apenas contempladas as abordagens conducentes a respostas correctas, no entanto é também fundamental analisar os erros cometidos pelos alunos, associados à utilização de estratégias de generalização desadequadas. Por um lado, raciocínios baseados na aplicação da proporcionalidade directa (TU_1) e na utilização de múltiplos da diferença (D_2), sem proceder a um ajuste do resultado, não se adequam a padrões de tipo linear, como é o caso deste. Para além destes casos, destacam-se ainda grupos que procederam a um ajuste do resultado, após terem usado a proporcionalidade directa (TU_2), mas como essa correcção foi efectuada tendo por base apenas relações de tipo numérico, não cumpriram as condições estipuladas no problema. Estes erros podem estar associados à não atribuição de significado aos valores utilizados, facto que também teve implicações na utilização, não inteiramente adequada, da estratégia explícita, verificando-se alguma confusão entre as variáveis envolvidas, o que levou à junção de lembretes e *pioneses*.

Fazendo uma síntese do trabalho dos alunos nesta tarefa, pode concluir-se que, à medida que a ordem dos termos se tornou mais distante, as dificuldades sentidas e os erros cometidos foram gradualmente aumentando, principalmente nas questões que promoviam a reversibilidade do pensamento (*3* e *4.3*). Apesar de terem recorrido a diversas estratégias, destaca-se a ausência de outras estratégias que seriam expectáveis em tarefas deste tipo, nomeadamente a utilização do raciocínio recursivo (D_1).

11.3.2. Tarefa 2 – *Piscinas*

A tarefa *Piscinas* (Anexo D) foi proposta aos alunos em Novembro de 2006, numa aula de Matemática de 90 minutos, embora a sua exploração ocupasse apenas 60 minutos dessa aula. Após a distribuição dos enunciados pelos vários grupos, procedeu-se à leitura da tarefa com o objectivo de esclarecer possíveis dúvidas. Ao contrário do que sucedeu com a tarefa anterior, esta suscitou de imediato algumas dificuldades de interpretação.

> Hélder: Stôra, o que é o bordo?
> Investigadora: No enunciado diz-se que os azulejos brancos são colocados no bordo da piscina. O que será o bordo?
> Paulo: É o que está à volta. São os brancos.
> Investigadora: Precisamente! A piscina tem azulejos de duas cores, estando os azuis no centro e os brancos à volta desses, na fronteira da piscina, tal como se vê na piscina.
> Andreia: E esta conta o que é [refere-se a 7×4]?
> Investigadora: Não é bem uma conta. Neste caso serve para indicar as dimensões da piscina, o comprimento e a largura. Contem quantos azulejos tem essa piscina no comprimento e na largura.
> [Os vários grupos contam em silêncio]
> Andreia: Ah! Sim, pois é! Tem 7 azulejos brancos de um lado e 4 no outro.

Depois de esclarecidas as dúvidas, os alunos iniciaram de imediato a resolução da tarefa. Na maioria dos grupos notou-se um grande empenho e cuidado no que refere às suas produções. Alguns destes pares utilizaram mesmo material de desenho, como a régua e lápis de cor, sempre que acharam necessário proceder à construção de figuras representativas das piscinas.

Tabela 34 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma B na Tarefa 2

Questões	**C**	*TU_1*	*TU_2*	*TU_3*	***TU***	*D_1*	*D_2*	*D_3*	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1	**9**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	-
2.1	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**8**	**-**	1
2.2	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**8**	**-**	1
3	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**3**	6

A Tabela 34 traduz, de uma forma global, o trabalho desenvolvido pelos alunos nesta tarefa, identificando o tipo de estratégias utilizadas e deixando antever quais as que foram privilegiadas e em que situações.

Na resolução da primeira questão, todos os grupos optaram por desenhar uma piscina de dimensões 10×4, procedendo posteriormente à contagem do número de azulejos de cada cor. Houve uma tendência geral para distinguirem os dois grupos de azulejos nas suas representações, sombreando a cinzento ou pintando de azul os azulejos centrais. Nesta fase da exploração não revelaram qualquer tipo de dificuldade.

A transição para a generalização distante, através do aumento significativo das dimensões da piscina (questão *2*), provocou uma alteração no tipo de abordagem utilizada. A maior parte dos alunos optou por uma estratégia explícita, tanto no cálculo do número de azulejos azuis (questão *2.1*) como nos brancos (questão *2.2*). Houve apenas um par cujo raciocínio não foi categorizado, por ter apresentado uma série de cálculos desenquadrados do objectivo de cada uma das questões. As resoluções apresentadas por estes dois alunos reflectem alguma confusão envolvendo conceitos geométricos, nomeadamente área e perímetro. Mas, não foi apenas este par que revelou dificuldades na exploração destas duas questões. De entre os grupos que aplicaram uma estratégia explícita, apenas três pares fundamentaram as suas respostas, associando os valores e os cálculos efectuados ao contexto do problema, os restantes alunos limitaram-se a registar as expressões numéricas solicitadas. Dos oito pares que utilizaram a estratégia explícita, um evidenciou dificuldades no cálculo do número de azulejos azuis. Nesta questão, o grupo em causa determinou a área total da piscina, apresentando a expressão numérica 30×90, ao invés de calcular a área a azul.

Apesar de a maioria dos alunos ter optado pelo mesmo tipo de estratégia, surgiram expressões numéricas diferentes associadas ao cálculo do número de azulejos brancos (questão *2.2*). As regras que deram lugar às expressões formuladas estão directamente associadas à forma como os alunos *viram* a estrutura do padrão. Como se pode observar na Figura 77, no caso dos azulejos azuis, os pares referidos usaram o mesmo tipo de abordagem.

	Expressão numérica	Natureza da generalização	N.º de pares de alunos
Questão *2.1*	88×28	Construtiva	7
Questão *2.2*	(90×2)+(28×2)	Construtiva	5
	(30×2)+(88×2)	Construtiva	2
	90+90+30+30–4	Desconstrutiva	1

Figura 77 - Natureza da generalização utilizada pelos alunos da turma B na Tarefa 2

Como se pode verificar os alunos formularam essencialmente generalizações de tipo construtivo, decompondo a figura em partes disjuntas. Apenas um par apresentou uma expressão numérica que teve por base uma generalização desconstrutiva. Partiram da ideia de perímetro, no entanto concluíram que seria necessário subtrair os azulejos contemplados duas vezes nesta contagem, ou seja, os que estão posicionados nos cantos da piscina.

A questão em que sentiram maiores dificuldades foi sem dúvida a terceira. Vários alunos solicitaram ajuda durante a sessão de exploração da tarefa. Percebendo que as dúvidas se estendiam praticamente a toda a turma, optou-se por promover uma discussão com todo o grupo no sentido de dar algumas orientações.

> Investigadora: Esta questão é um pouco diferente das anteriores, mas continuamos a querer descobrir o número de azulejos brancos e azuis.
> Jorge: Mas os azuis não são 300?
> Investigadora: Não é isso que o enunciado diz. Sabemos que a empresa tem 300 azulejos azuis e que só temos esses para usar na construção da piscina. Esta piscina é igual às anteriores?
> Andreia: Não, é quadrada.
> Investigadora: Então temos uma piscina quadrada. Mas apesar de ser quadrada os azulejos distribuem-se da mesma forma, os azuis no centro e os brancos no bordo […] Espero que agora esteja mais claro.

Esta discussão não contribuiu, pelo menos de forma significativa, para o sucesso dos alunos na resolução desta questão. Este facto reflecte-se na Tabela 34, onde estão registadas 6 respostas não categorizáveis. Grande parte destes alunos não resolveu o problema e um dos pares apresentou apenas o cálculo 300÷4=75, no entanto não concluíram o seu raciocínio. Os restantes três grupos começaram por recorrer à tentativa e erro para determinar as dimensões do quadrado azul, conseguindo descobrir que se tratava de um quadrado de dimensões 17×17. No entanto, a partir desta fase, as respostas destes pares começaram a diferenciar-se. Um dos grupos não continuou a resolução, limitando-se apenas a utilizar a tentativa e erro. Já os outros dois pares conseguiram identificar o número de azulejos azuis, aplicando a regra que tinham descoberto previamente e apenas um deles determinou o número de azulejos brancos, recorrendo a uma abordagem da mesma natureza.

Da análise do trabalho dos alunos ao longo desta tarefa, pode concluir-se que sentiram maiores dificuldades do que na anterior, possivelmente pelo envolvimento de conceitos de natureza geométrica e pela estrutura do padrão que envolvia a variação simultânea de duas variáveis. Nas questões de generalização próxima voltaram a privilegiar a contagem e na generalização distante deram preferência à estratégia explícita, embora também tivessem recorrido à tentativa e erro quando a reversibilidade do pensamento esteva envolvida. Foi precisamente neste caso que evidenciaram maiores dificuldades em generalizar e onde apresentaram maior taxa de insucesso.

11.3.3. Tarefa 3 – Sequência de números

A tarefa *Sequência de números* (Anexo E) foi proposta em Janeiro de 2007, numa aula de Matemática e a sua exploração teve a duração de 90 minutos. Como era habitual nestas sessões, os alunos organizaram-se em pares e assistiram atentamente à leitura da tarefa. Depois deste procedimento, iniciaram a sua resolução, já que não tinha sido colocada qualquer dúvida.

Na primeira questão da tarefa pretendia-se que os alunos continuassem a sequência por mais duas linhas. Perante esta proposta, todos os pares optaram por reproduzir na folha de resposta a sequência dada no enunciado, acrescentando posteriormente a 6ª e a 7ª linhas. Analisando o trabalho de cada um dos grupos, não foram identificadas dificuldades na continuação da sequência. Os alunos revelaram ter compreendido a estrutura recursiva da mesma, tendo aplicado D_1 linearmente, ou seja, continuaram a sequência com base no reconhecimento da diferença entre termos consecutivos dispostos por linha, identificando ainda a estrutura visual da mesma.

As primeiras dificuldades surgiram quando tentaram explicar a regra que lhes permitiu continuar a sequência (questão *2*). Apesar de terem sido bem sucedidos no seu prolongamento, na resolução da questão anterior, não estavam a conseguir descrever o raciocínio utilizado e o maior entrave residia na utilização de linguagem corrente. Percebendo essa dificuldade generalizada, foi-lhes relembrado que poderiam recorrer também a desenhos e cálculos, para além de palavras, se achassem conveniente, e que o objectivo passava por conseguirem "explicar, a alguém que não conhecesse a sequência, a forma como era construída". Depois destas orientações, os alunos tentaram estruturar uma explicação mas nenhum grupo foi capaz de delinear uma regra que caracterizasse integralmente a sequência, fazendo apenas referência a relações que tinham identificado. A maioria dos pares optou pela utilização da linguagem corrente e utilizou na sua descrição referências a características associadas à disposição visual dos números como "par debaixo de par e ímpar debaixo de ímpar e é da esquerda para a direita e da direita para a esquerda" ou "seguimos a mesma ordem porque está da esquerda para a direita e os outros da direita para a esquerda". Em alguns casos foram utilizados diagramas com setas, indicando o sentido de crescimento da sequência e a colocação dos números ao longo da mesma. Destacam-se ainda descrições centradas em casos particulares, por exemplo: "na 6ª linha os números estão por ordem decrescente e na 7ª linha estão por ordem crescente". Este tipo de discurso reflecte o estabelecimento de uma generalização factual, restringindo a regra à observação de particularidades da sequência.

A terceira questão da tarefa também suscitou dúvidas aos alunos, devido ao seu carácter aberto. Ao relerem o enunciado, não estavam conscientes do seu objectivo, não compreendiam o que se pretendia com investigar "relações entre os números da sequência". Houve então necessidade de dar algumas orientações ao grande grupo no sentido de clarificar o enunciado e esclarecer as dúvidas emergentes.

> Investigadora: Nesta tarefa foi-vos dada uma sequência diferente das anteriores. Não foi?
> Alunos: Sim!
> Hélder: Esta tem números as outras tinham figuras.
> Investigadora: Pois! Nas tarefas anteriores vocês descobriram relações especiais nas sequências. Por exemplo, como se relacionavam o número de *pioneses* com o número de lembretes [refere-se à tarefa *Os lembretes da* Joana]. Lembram-se?
> Alunos: Sim!
> Investigadora: Agora é a mesma coisa, devem olhar bem para essa sequência e tentar descobrir relações entre os números que aí se apresentam e a forma como estão dispostos.

Depois desta discussão, os alunos retomaram gradualmente o seu trabalho, notando-se ainda alguma hesitação em alguns grupos. Ao analisar as suas descobertas, conclui-se que não foram muito ambiciosos ou mesmo persistentes, tendo avançado para a questão seguinte após terem identificado duas ou três relações numéricas. Outra ilação que se extrai do trabalho dos alunos foi o facto de terem centrado a sua investigação na observação das relações numéricas existentes em cada coluna, ao contrário do que sucedeu na primeira questão da tarefa. A maioria dos pares identificou colunas constituídas apenas por números pares (1^a, 3^a e 5^a) e colunas que contemplam apenas números ímpares (2^a e 4^a). Para além desta constatação, alguns grupos foram mais além e descobriram que os números dispostos na 1^a e na 5^a colunas exibiam outras relações, como: "a coluna nº 1 e a coluna nº 5 têm os números da tabuada do 4"; e "a primeira coluna é a tabuada do 8". A identificação destas relações tem subjacente um raciocínio de tipo multiplicativo, no entanto destacam-se outros grupos que observaram os números dispostos em cada coluna tendo por base um raciocínio aditivo, por exemplo: "a primeira coluna é de 8 em 8, a segunda está de 6 em 2, a terceira coluna é de 4 em 4, a quarta coluna é de 2 em 6 e a quinta coluna é de 8 em 8". A única referência às linhas, relacionou-se com a ordem dos números: "nas linhas pares os números escrevem-se da direita para a esquerda e nas linhas ímpares escrevem-se da esquerda para a direita" ou "na primeira linha os números estão ordenados e na segunda estão ao contrário".

Na identificação da posição ocupada pelo número 40 na sequência (questão *4*), a preferência pelo raciocínio recursivo (D_1) foi notória. Seis pares de alunos continuaram a sequência até encontrarem o número em causa, para assim descobrirem a linha e a coluna ocupadas. Os restantes grupos recorreram a duas estratégias de natureza diferente para determinar a linha e a coluna associadas ao 40. Concluíram que este número está posicionado na 1^a coluna porque é múltiplo de 8, usando assim uma estratégia explícita, e, após a identificação da coluna, continuaram a sequência referente à mesma até obter 40 (D_1).

Na última questão da tarefa, os alunos tinham de localizar as posições relativas aos números 81 e 542. Para melhor distinguir o trabalho dos alunos nesta questão, optou-se por considerar duas subalíneas, *5.1* e *5.2*, como se pode observar na Tabela 35. No que refere ao primeiro caso, a estratégia privilegiada continuou a ser a recursiva (D_1). Quatro grupos continuaram a sequência, na íntegra, até obter 81, descobrindo desta forma a posição ocupada pelo número pretendido. Um par conjugou o raciocínio recursivo com uma estratégia explícita, já que, ao saber que os múltiplos de 8 se encontravam na 1^a coluna (E), continuaram a sequência associada a essa coluna até obter 80 (D_1), tornando mais fácil a localização do 81. A estratégia explícita foi aplicada também por outros três grupos, tanto na identificação da linha como da coluna. Como "cada linha tem 4 números" fizeram $81 \div 4$, concluindo assim que "a linha 20 fica completa e passa um número para a 21 e para a 2^a coluna". Finalmente, houve ainda um par que aplicou a proporcionalidade directa, com ajuste do resultado, para determinar a linha (TU_3) e uma estratégia explícita para determinar a coluna. Observaram que 81 estaria na 2ª coluna porque o 80 está na 1ª (E) e se "40 está na 10ª linha então 80 está na 20ª linha e o 81 está na 21ª porque muda de linha" (TU_3).

A localização do número 542 revelou-se bastante complexa para estes alunos. Apenas três pares resolveram esta questão, os restantes não conseguiram generalizar para um termo tão distante, possivelmente por terem recorrido previamente a estratégias que não se adequam a este tipo de questões, como é o caso da recursiva. Os grupos que foram bem sucedidos centraram-se novamente na existência de quatro números por linha, efectuando o cálculo 542÷4. Concluíram que 135 das linhas ficariam completas, sobrando 2 números que iriam passar para a linha seguinte. Desta forma "542 fica na linha n.º 136 e na coluna 3".

A Tabela 35 permite identificar as estratégias utilizadas pelos alunos nas questões *1*, *4* e *5* desta tarefa. A segunda e a terceira questões não são contempladas já que a sua estrutura não se enquadra na categorização adoptada neste estudo. Os casos em que os alunos aplicaram mais do que uma estratégia estão devidamente identificados com os símbolos * e **. Na questão *4* três pares usaram a estratégia recursiva juntamente com a estratégia explícita. Na questão *5.1* um par aplicou as estratégias TU_3 e explícita e outro par usou simultaneamente a recursiva e a explícita.

Tabela 35 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma B na Tarefa 3

Questões	***C***	TU_1	TU_2	TU_3	***TU***	D_1	D_2	D_3	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1	**-**	-	-	-	**-**	9	-	-	**9**	**-**	**-**	-
4	**-**	-	-	-	**-**	6+3*	-	-	**6+3***	**3***	**-**	-
5.1	**-**	-	-	1**	**1****	4+1*	-	-	**4+1***	**3+1*+1****	**-**	-
5.2	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**3**	**-**	6

Como se pode constatar, o aumento da ordem de grandeza do número a localizar trouxe maiores dificuldades aos alunos. Apenas aqueles que identificaram uma regra de natureza explícita foram capazes de generalizar para valores próximos e distantes. O raciocínio recursivo apareceu de forma frequente no trabalho dos alunos, mas não se revelou útil na localização de números como o 542, sendo mais adequado à resolução de questões de generalização próxima.

11.3.4. Tarefa 4 – A Pizzaria Sole Mio

A tarefa *A Pizzaria Sole Mio* (Anexo F) foi proposta em Fevereiro de 2007, nos primeiros 60 minutos de uma aula de Matemática. Nos restantes 30 minutos o professor optou por fazer revisões para o teste que se avizinhava. Como era habitual, havia um ambiente calmo na turma e os alunos seguiram atentamente a primeira leitura do enunciado já distribuído. Posteriormente, iniciaram a sua resolução sem colocar qualquer dúvida.

Para ter uma ideia global do trabalho desenvolvido pelos alunos desta turma na exploração da tarefa, construiu-se a Tabela 36, que sintetiza as estratégias de generalização por eles utilizadas. Optou-se por não incluir a questão *4.1*, por se considerar que a sua estrutura não se enquadra na categorização adoptada neste estudo, no entanto, é feita uma análise do trabalho apresentado pelos vários grupos neste caso.

Tabela 36 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma B na Tarefa 4

Questões	***C***	TU_1	TU_2	TU_3	***TU***	D_1	D_2	D_3	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1	**8**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**1**	**-**	-
2	**1**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**8**	**-**	-
3	**-**	-	-	-	**-**	-	1	1	**2**	**7**	**-**	-
4.2	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**8**	**-**	1

Os alunos não revelaram qualquer dificuldade na resolução das duas primeiras questões desta tarefa, apesar do tipo de generalização envolvida, em cada uma delas, ser de natureza diferente. Nota-se, no entanto, uma diferença nas estratégias privilegiadas num caso e noutro. Na questão *1*, foram identificadas duas abordagens distintas. A maioria dos pares optou pela contagem, com base na construção de uma mesa com 10 pizzas e o respectivo número de pessoas. De entre estes grupos, destaca-se um que não efectuou uma contagem unitária do número de pessoas. Como se pode observar na Figura 78, descobriram uma forma organizada de concretizar a contagem, dando lugar a uma regra que aplicaram posteriormente na resolução da questão *2*. Embora não seja muito comum em questões que envolvem a generalização próxima, um dos pares utilizou, já nesta fase, uma estratégia explícita, concluindo que: “São 10 pessoas de um lado, 10 do outro também, com uma em cima e outra em baixo. São 22 pessoas”. Segundo estes alunos, a regra surgiu da análise das representações do 3.º e 4.º termos, dadas no enunciado, nas quais identificaram os agrupamentos referidos na sua resposta.

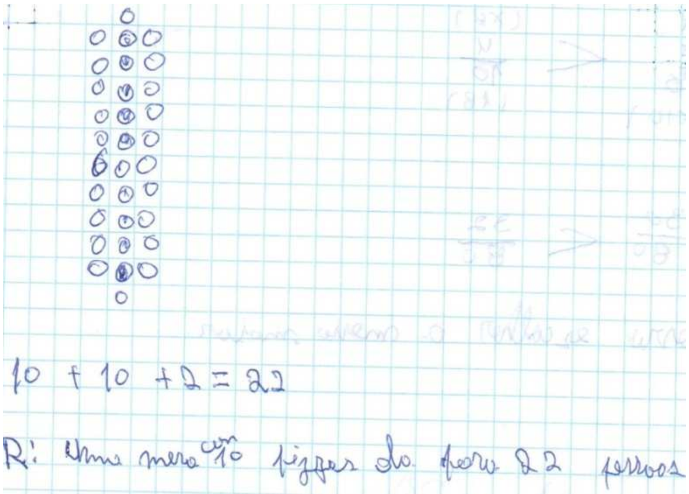


Figura 78 - Resolução da questão *1* da Tarefa 4 apresentada por um par de alunos – Turma B

O aumento do número de pizzas para 31 (questão *2*) provocou algumas alterações nas preferências dos alunos no que refere às estratégias utilizadas. Ao passar para a generalização distante, a estratégia predominante passou a ser a explícita, registando-se apenas um caso em que optaram pela contagem, mesmo sendo um processo exaustivo na resolução de questões deste tipo. Os oito pares que descobriram uma estratégia explícita para determinar o número de pessoas, conhecendo a quantidade de pizzas dispostas na mesa, identificaram a mesma regra, originada por uma generalização de natureza construtiva. Surgiram argumentações como: “Fazemos as 31 pizzas no meio. No lado direito fazemos 31 pessoas e no lado esquerdo também, 31+31=62. Mais as duas pessoas que estão no topo da mesa, 62+2=64”. Respostas deste tipo reforçam a relevância do contexto visual na formulação da regra identificada.

Na questão *3*, começaram a surgir as primeiras dúvidas, essencialmente associadas a dificuldades na interpretação do enunciado. A maioria dos alunos estava a considerar apenas os 57 convidados, esquecendo-se de contar o João. Ao solicitarem a presença da investigadora, e mesmo do professor, faziam comentários como: “com 57 não dá”; “não conseguimos resolver com este número”; ou “não dá para pôr 57 numa mesa”. Foi então necessário alertar o grande grupo para este pormenor, aproveitando para reler o enunciado e sublinhar a presença do João junto dos seus convidados. Depois deste esclarecimento, os alunos retomaram o seu trabalho, tendo daqui resultado diversas estratégias de generalização entre as quais se destaca a explícita, utilizada por 7 pares. Os grupos que optaram por esta abordagem chegaram a uma resposta correcta, mostrando ser capazes de usar o raciocínio inverso. Com base na regra descoberta na questão *2*, fizeram

58–2, subtraindo as pessoas sentadas nas pontas, e depois 56÷2, já que, de cada lado da mesa, o número de pessoas sentadas correspondia ao número de pizzas. Os restantes dois grupos optaram por outro tipo de estratégia, assente na diferença entre termos consecutivos, que não os conduziu a uma resposta correcta. Um deste pares fez 58÷2=29, distribuindo as 58 pessoas em dois grupos, mas não consideraram que dois desses elementos estariam sentados nas pontas da mesa, partilhando 1 pizza, o que implicava o ajuste do resultado, o que não aconteceu (D_2). O outro par, apesar de ter feito um ajuste, não o efectuou correctamente, subtraindo 2 unidades a 29 (D_3). Os erros cometidos por estes grupos podem estar relacionados com o facto de limitarem o seu trabalho a um contexto puramente numérico e não relacionarem os cálculos efectuados com o contexto do problema.

A questão *4.1* foi resolvida com relativa facilidade. Tinham acesso aos dados pretendidos através das figuras representadas no enunciado, ou seja, uma mesa de 8 pessoas e uma mesa de 10 pessoas. Esta questão tinha subjacente o conceito de divisão, facto que não constituiu qualquer dificuldade para estes alunos. A maioria optou pela comparação de números fraccionários ($\frac{3}{8}$ e $\frac{4}{10}$), analisando a sua ordem de grandeza após terem feito a redução ao mesmo denominador. Apenas dois grupos recorreram à representação decimal destes números para estabelecer a comparação, concluindo que "O João deveria escolher a mesa de 10 pessoas, porque nesta mesa toca mais pizza a cada pessoa".

Na última questão da tarefa, pretendia-se que os alunos investigassem o que aconteceria à quantidade de pizza destinada ao João, se ele convidasse mais ou menos pessoas para o seu aniversário. Este problema foi seguramente aquele em que os alunos demonstraram maiores dificuldades. Inicialmente não estavam a conseguir estruturar uma estratégia para resolver esta questão, o que conduziu a uma nova intervenção perante a turma, no sentido de clarificar o objectivo do enunciado.

> Investigadora: [Depois de reler o enunciado] Então quais são as vossas dúvidas?
> Andreia: Não tem números stôra!
> Filipe: O problema é começar…
> Investigadora: A Andreia diz que não tem números. Na verdade não tem. Mas podem ser vocês a propor.
> Filipe: Nós?!?
> Investigadora: O que se pretende saber?

Rafael: Se o João tem que convidar mais pessoas ou menos.
Investigadora: Pois! De maneira a comer maior quantidade de pizza.
Andreia: E podemos escolher os números?
Investigadora: Claro que podem, aliás é o que se diz na nota no enunciado 'experimenta alguns casos de forma a chegares a uma conclusão'.

Mesmo depois desta discussão, houve um par que não apresentou qualquer resposta a esta questão. Dos restantes pares, a maioria baseou a sua conclusão no estudo de um caso, para além do que já tinha sido analisado na questão anterior. Os casos testados tiveram por base a utilização da estratégia explícita, descoberta previamente, e permitiram que os alunos conjecturassem que "para comer mais pizza o João tem de aumentar o número de convidados".

Analisando o trabalho desenvolvido pelos alunos nesta tarefa, é pertinente destacar algumas situações. Conclui-se que utilizaram vários tipos de estratégias, à excepção da termo unidade e da tentativa e erro. A ausência da primeira pode estar relacionada com o tipo de números propostos no enunciado. Nenhum dos números, 10, 31 ou 58, era múltiplo dos termos apresentados, o que pode ter contribuído para que os alunos não utilizassem um raciocínio proporcional (Sasman, Olivier & Linchevski, 1999). Nas questões de generalização próxima e distante prevaleceram, respectivamente, as estratégias contagem e explícita. Tal como aconteceu em tarefas anteriores, estes alunos continuam a revelar algumas dificuldades ao nível da argumentação e na resolução de questões que promovem a reversibilidade do pensamento.

11.3.5. Tarefa 5 – *Dobragens*

Esta tarefa (Anexo G) foi proposta em Março de 2007, numa aula de Matemática de 90 minutos e teve a duração de 60 minutos. Na restante meia hora, o professor optou por discutir em grande grupo alguns exercícios que tinham sido propostos na aula anterior. Como era habitual no início da sessão, foi lido o enunciado da tarefa, de forma a esclarecer potenciais dúvidas de interpretação. Depois deste procedimento, os comentários dos alunos centraram-se no novo elemento que tinha acabado de ser introduzido, a folha de jornal: "vamos usar a folha stôra?"; "para que é?"; "vamos ter uma?". Desde logo, se tornou evidente, nos alunos desta turma, o entusiasmo e a curiosidade, por poderem explorar a tarefa com recurso a um material que não era usual nas aulas de Matemática. Apesar da ligeira agitação que gradualmente se começou a instalar, com a distribuição das folhas de jornal por cada um dos pares, a calma foi sendo restabelecida, à medida que iam iniciando a resolução da tarefa.

Mesmo tendo sido lido o enunciado, perante o grande grupo, os alunos foram mais uma vez alertados para o significado de fazerem uma previsão do número de partes em que a folha ficaria dividida, após três dobragens (questão *1*).

> Investigadora: Atenção! Na primeira questão da tarefa pede-se uma previsão. Devem pensar numa resposta antes de abrir a folha.
> Rafael: Como é que sabemos as partes sem abrir a folha?
> Carlos: Eu já ia abrir [sorri].
> Jorge: Eu também!
> Investigadora: Não podem. Primeiro devem imaginar o que estará a acontecer à folha à medida que a vão dobrando. Depois de terem a vossa resposta podem verificar se está correcta abrindo a folha.

Após este esclarecimento, os alunos iam manipulando a folha e discutindo entre si de modo a chegar a uma previsão. Três dos grupos esperavam encontrar a folha de jornal dividida em 6 partes iguais, tendo ficado surpreendidos, depois de abrirem a folha, ao encontrarem um resultado diferente do previsto. Subjacente a esta conjectura esteve uma interpretação de natureza aditiva, traduzida em respostas como: “Nós achávamos que era 6 partes porque de cada vez que se dobra é mais 2”; ou “Ficará dividida em 6 partes iguais porque 3×2=6. Afinal encontramos 8 partes depois de abrir a folha”. As previsões dos restantes grupos foram validadas com a abertura da folha, encontrando as 8 partes que tinham conjecturado. As conclusões apresentadas por estes pares, reflectem a formação de uma imagem mental associada ao efeito da dobragem na folha: “Achámos que ficará em 8 partes. Ao dobrarmos 1 vez faz duas partes, 2 vezes faz 4 partes, divide a meio e 3 vezes faz 8 partes porque divide outra vez a meio”; ou “Esperamos encontrar 8 partes porque é sempre o dobro do anterior depois de dobrar”.

A estratégia mais utilizada na resolução da segunda questão foi a recursiva (D_1). Os alunos que optaram por esta abordagem concluíram que, à medida que iam dobrando a folha de jornal, o número de partes iguais em que esta ficaria dividida duplicava. A maioria encontrou esta variação logo após as três dobragens e continuou a sequência até às sete dobragens, verificando deste modo que a folha ficaria dividida em 128 partes iguais. Dois destes grupos, ainda dobraram a folha uma quarta vez, obtendo 16 secções, e só depois utilizaram o mesmo processo. Apenas dois pares usaram uma abordagem diferente da que foi descrita. Um dos grupos não foi capaz de se libertar do material, optando por dobrar a folha sete vezes e contar directamente o número de secções obtidas. A contagem não foi eficaz neste caso já que chegaram a uma resposta incorrecta. O outro grupo deduziu uma regra baseada na análise do último caso estudado, ou seja, o das três dobragens (Figura 79).

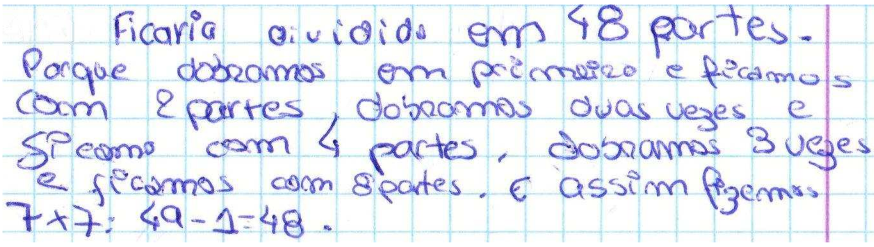


Figura 79 - Resolução da questão *2* da Tarefa 5 apresentada por um par de alunos – Turma B

Estes alunos formularam uma generalização assente em pressupostos errados, não verificaram se a regra era válida para outros casos, aplicando-a indevidamente na descoberta do número de secções em que a folha ficaria dividida, depois de sete dobragens.

A descoberta e descrição de uma regra que relacionasse directamente o número de dobragens com o número de secções encontradas na folha (questão *3*), revelaram-se bastante complexas para estes alunos. As maiores dificuldades observadas nesta turma, residiram no estabelecimento de uma relação entre as variáveis dependente e independente e na necessidade de explicar a regra descoberta, já que não tinham por hábito, nas aulas de Matemática, estruturar o seu raciocínio em linguagem corrente. A maioria dos grupos encontrou uma regra recursiva (D_1), referindo "tem que se multiplicar por 2 o número de partes" ou "a cada dobra fica-se sempre com o dobro das partes que já existiam". Como se pode concluir, o tipo de regra identificada tem apenas por base a variação ocorrida na variável dependente. Os restantes grupos não apresentaram qualquer resposta.

Na resolução da quarta questão da tarefa continuou a predominar o raciocínio recursivo (D_1). Não tendo descoberto uma forma directa de relacionar as duas variáveis envolvidas, a maioria dos grupos optou por continuar a utilizar a relação recursiva identificada, até encontrar o número de dobragens correspondentes a 1024 partes. Dos restantes grupos, dois apresentaram respostas não categorizáveis e o outro aplicou uma estratégia desadequada, como se pode observar na Figura 80.

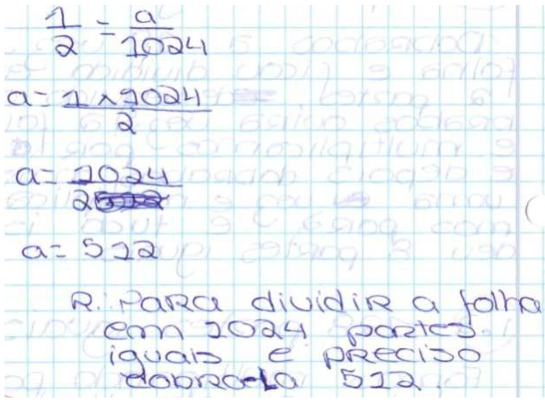


Figura 80 - Resolução da questão *4* da Tarefa 5 apresentada por um par de alunos – Turma B

Este par recorreu à estratégia termo unidade sem ajuste (TU_1), abordagem que não se adequa a um padrão de estrutura não linear.

A última questão da tarefa tinha subjacente o conceito de área e a sua resolução estava dependente dos resultados obtidos nas questões *1* e *2*. Houve apenas um grupo que não apresentou resposta. Os restantes não evidenciaram qualquer tipo de dificuldade, tendo privilegiado a representação fraccionária das áreas solicitadas.

Tabela 37 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma B na Tarefa 5

Questões	***C***	TU_1	TU_2	TU_3	***TU***	D_1	D_2	D_3	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1	**2**	-	-	-	**-**	7	-	-	**7**	**-**	**-**	-
2	**1**	-	-	-	**-**	7	-	-	**7**	**-**	**-**	1
3	**-**	-	-	-	**-**	6	-	-	**6**	**-**	**-**	3
4	**-**	1	-	-	**1**	6	-	-	**6**	**-**	**-**	2

Esta tarefa apresenta algumas características diferentes das anteriores e que podem ter tido impacto no desempenho dos alunos. Por um lado envolvia a exploração de um padrão exponencial e, ao mesmo tempo, destaca-se a utilização de material concreto na sua resolução. O recurso à folha de jornal constituiu uma motivação para os alunos, dada a sua reacção inicial, e permitiu que pudessem ter um modelo visual dos primeiros termos da sequência. Esta situação resultou para a maioria dos alunos que foram gradualmente descobrindo relações que lhes permitiram continuar a resolver a tarefa sem aquele suporte. No entanto, notou-se que alguns pares não conseguiram passar do plano concreto para o abstracto, mostrando dificuldades ao nível da generalização distante. Outra dificuldade que emergiu do trabalho dos alunos foi a incapacidade de descobrir uma relação entre as variáveis dependente e independente, o que contribuiu para a predominância da estratégia recursiva, mesmo em questões de generalização distante (Tabela 37).

11.3.6. Tarefa 6 – Sequência de losangos

A tarefa *Sequência de losangos* (Anexo H) foi proposta em Abril de 2007, numa aula de Matemática de 90 minutos. Como sempre, a sessão teve início com a leitura do enunciado, seguida do esclarecimento de dúvidas levantadas pelos alunos. Apesar de, no enunciado da tarefa, estarem representados os três primeiros losangos da sequência, tornou-se necessário definir losango.

> Gonçalo: Stôra, o que é losângulo?
> Investigadora: Não é 'losângulo' mas sim losango. Quem sabe dizer o que é?
> [Faz-se silêncio]
> Hélder: Eu não sei explicar, mas são estas figuras não é?
> Investigadora: Sim! Será que conseguem identificar algumas propriedades?
> Rafael: Tem 4 lados.
> Investigadora: Boa! O que significa que é um quadrilátero. Mas tem mais propriedades especiais. Olhem bem para as figuras.
> Rita: Tem sempre os lados iguais.
> Investigadora: Também é verdade e conseguem ver isso nas três figuras do enunciado. E mais?
> [Faz-se silêncio]
> Investigadora: Vá, eu ajudo! Também tem os lados opostos paralelos.

Depois desta discussão os alunos iniciaram calmamente a resolução da tarefa. A maioria dos grupos centrou a sua atenção nas figuras do enunciado, de forma a descobrir quantas peças teria o termo seguinte (questão *1.1*). Identificaram uma regra, aplicável aos três casos fornecidos, que generalizaram para o losango de lado 4, utilizando deste modo uma estratégia explícita, tendo por base o conceito de área. Como exemplo, apresenta-se a resposta de um dos pares desta turma, o Hélder e o Manuel.

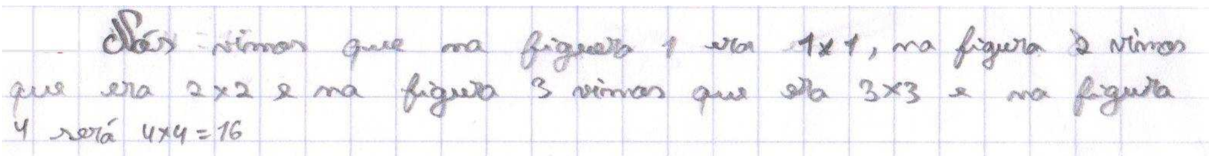


Figura 81 - Resolução da questão *1.1* da Tarefa 6 apresentada por um par de alunos – Turma B

Apenas dois pares optaram pela contagem, procedendo à construção de um losango de lado 4 e das respectivas peças. Estes alunos sentiram algumas dificuldades na representação do losango, principalmente na sua decomposição nas diferentes peças, o que os levou a utilizar material de desenho, de modo a aperfeiçoar a sua construção. A representação visual do 4.º termo da sequência conduziu posteriormente à contagem do número de peças que o compunham.

Todos os alunos utilizaram uma estratégia explícita para determinar o número de peças existentes num losango de lado 50 (questão *1.2*). Identificaram que o produto *lado*×*lado*, daria o número de peças utilizadas na construção do polígono. Os grupos que tinham aplicado previamente a contagem deduziram esta regra, testando-a para os quatro primeiros termos da sequência.

Na resolução da segunda questão da tarefa, a maioria dos alunos optou por utilizar a estratégia tentativa e erro, orientada pela regra que tinha sido descoberta na exploração das questões anteriores. O objectivo passava por descobrir o perímetro de um losango constituído por 324 peças, ou seja, sabendo a área do polígono os alunos teriam de calcular o comprimento do lado, invertendo o raciocínio usado previamente. Deste modo, é natural que grande parte dos grupos tenha utilizado a abordagem acima descrita, já que o conceito de raiz quadrada apenas se aborda formalmente no 7.º ano de escolaridade. No entanto, houve três grupos que não foram capazes de resolver correctamente esta questão, mostrando dificuldades no trabalho com conceitos geométricos, em particular, os de área e perímetro. Para determinar o comprimento do lado do losango pretendido, dois destes grupos fizeram 324÷2 e o outro par apresentou o cálculo 324÷4.

À medida que os diferentes grupos iam avançando na resolução da tarefa, observou-se que a maioria apresentou dificuldades na exploração da terceira questão. A necessidade de formular uma regra, sem o apoio de casos particulares fornecidos no enunciado, foi o factor que mais contribuiu para as dúvidas sentidas pelos alunos, reflectidas em comentários como: "Como é isto? Não temos números?"; "Quais são os losangos?"; ou "Como calculamos o perímetro stôra? Não sabemos os lados!". Foi então necessário interromper o trabalho da turma de forma a esclarecer e orientar os alunos.

> Investigadora: Alguns de vocês repararam que na terceira questão não têm figuras nem números. E isso está a trazer-vos algumas dificuldades. Vou dar-vos uma pista. No enunciado tem uma nota importante que deve ter passado despercebida [relê a sugestão]. 'Experimenta alguns casos…'.
> Hélder: Casos?!?
> Investigadora: Voltando atrás […] vocês querem estudar losangos que se relacionam de forma especial, não é?
> Andreia: Que sejam o triplo um do outro.
> Investigadora: O lado deve ser o triplo do lado do outro. E querem saber como se relacionam os perímetros e as áreas dessas figuras.
> Rafael: E podemos experimentar os que quisermos?
> Investigadora: Sim, desde que o lado de um seja o triplo do lado do outro.

Depois desta discussão, os alunos retomaram o seu trabalho e reiniciaram a exploração da questão. A maioria apoiou as suas conjecturas no estudo de um só caso, escolhendo figuras que conheciam do enunciado, o losango de lado 1 e o losango de lado 3. Alguns grupos analisaram mais casos, recorrendo a tabelas para organizar os dados e encontrar relações numéricas entre os perímetros e as áreas dos losangos escolhidos. Salienta-se que nenhum dos pares recorreu a representações visuais para resolver a terceira questão, tendo tido sempre por base o contexto numérico.

Na questão *3.1*, todos os grupos identificaram correctamente a relação entre os perímetros dos losangos, concluindo que "se triplicar o lado o perímetro também triplica". No entanto, três dos pares que analisaram o caso dos losangos de lados 1 e 3 apresentaram uma generalização factual: "chegamos à conclusão que o perímetro da figura de lado 3 é o triplo do perímetro da figura de lado 1".

Na resolução da questão *3.2*, foram identificadas mais dificuldades. Apenas cinco dos nove grupos identificaram correctamente a relação entre as áreas dos losangos. Nem todos os alunos conseguiram estabelecer uma conjectura e, em alguns casos a regra foi formulada com base em pressupostos errados. Um grupo concluiu que, tal como na questão anterior, "a área também é o triplo", sem apresentar qualquer trabalho que suportasse este raciocínio. Foi ainda identificado um par que, tendo apenas estudado o caso dos losangos de lados 1 e 3, descobriu uma relação de tipo aditivo referindo que "a área é +8", o que salienta o perigo da formulação de conjecturas apoiadas na análise de poucos casos. À semelhança da questão *3.1*, continuaram a surgir regras baseadas em generalizações factuais, fazendo referência aos casos estudados, como por exemplo: "o de lado 3 tem área 9 vezes maior que o de lado 1".

Tabela 38 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma B na Tarefa 6

Questões	***C***	TU_1	TU_2	TU_3	***TU***	D_1	D_2	D_3	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1.1	**2**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**7**	**-**	-
1.2	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**9**	**-**	-
2	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**6**	3

Como se pode observar na Tabela 38, na resolução desta tarefa foram utilizadas várias estratégias, no entanto destaca-se a ausência da diferença e da termo unidade. Este facto pode estar relacionado com a forte componente visual associada a esta tarefa que envolvia conceitos geométricos como a área e o perímetro, por outro lado, a estrutura não linear do padrão envolvido também pode ter influenciado a escolha das estratégias. Destaca-se a predominância da estratégia explícita, tanto na generalização próxima como na generalização distante, o que traduz que a maioria dos alunos descobriu de imediato uma relação directa entre as variáveis envolvidas, estabelecendo, neste caso, generalizações de natureza construtiva.

11.3.7. Tarefa 7 – Cubos de chocolate

Cubos de chocolate (Anexo I) foi a última tarefa a ser proposta e a sua exploração teve lugar em Maio de 2007, numa aula de Matemática de 90 minutos. Após a leitura do enunciado, foi explicado aos alunos que poderiam utilizar material concreto na resolução da tarefa, neste caso cubos de encaixe. Tal como já tinha sucedido na sessão de exploração da tarefa *Dobragens*, a turma reagiu com bastante entusiasmo perante a possibilidade de recorrerem a material manipulável de suporte ao seu trabalho, reflectindo-se nos vários comentários que irromperam na sala: “Isso é como os *leggos*?”; “É para fazer os cubos?”; “Oh stôra dê de cores diferentes!”; “Eu quero muitos!”.

Ao contrário do que era habitual, esta sessão decorreu num clima de alguma agitação, maioritariamente associado ao material utilizado. Numa primeira fase, todos os alunos queriam ter acesso aos cubos e fazer construções individuais, só para terem contacto com os cubos de encaixe. No entanto, apesar desta situação, o trabalho de grupo não ficou condicionado, sendo evidente a preocupação dos alunos em confrontar as suas opiniões, de forma a obter uma resposta satisfatória para ambos, para posteriormente procederem ao seu registo.

Na primeira questão da tarefa, pretendia-se que os alunos descobrissem o número de cubos unitários com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate, existentes num cubo de aresta 3. Todos, sem excepção, utilizaram os cubos de encaixe para construir o cubo pretendido e contaram o número de cubos unitários nas condições anteriormente descritas. Ao longo da sessão, foram identificadas algumas dificuldades associadas ao processo de contagem. Em alguns grupos, os alunos iam rodando o cubo à medida que contavam os elementos pretendidos, correndo o risco de repetir ou não contar cubos unitários. Estes alunos evidenciaram dificuldades ao nível da visualização espacial que poderiam interferir com a contagem, já que esta não estava a ser efectuada de forma organizada. Foi então que se sugeriu que mantivessem o cubo fixo, na mesa de trabalho ou na palma da mão, de forma a facilitar o processo de contagem. Mesmo depois desta sugestão, houve um par que contou erradamente o número de cubos unitários de cada tipo, presentes no cubo inicial. Entre os restantes grupos, destacam-se duas situações relevantes. Por um lado, dois dos pares verificaram se os valores encontrados coincidiam com o volume do cubo, confirmando assim se a contagem foi efectuada correctamente, por outro lado, salientam-se também as respostas de outros dois pares cuja argumentação reflecte o impacto da componente visual no seu raciocínio. O André e o Carlos analisaram o cubo por *camadas* e identificaram a posição ocupada pelos vários cubos unitários, como se pode verificar pelas representações que apresentaram (Figura 82). Como se pode verificar, a contagem foi concretizada de uma forma organizada.

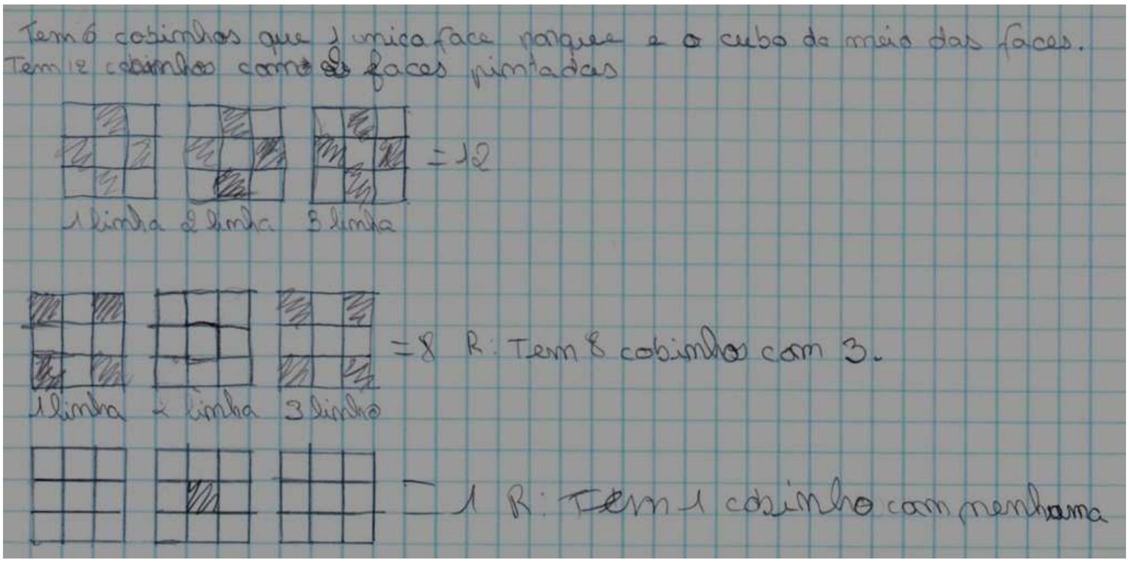


Figura 82 - Resolução da questão *1* da Tarefa 7 apresentada por um par de alunos – Turma B

Por sua vez, o Pedro e o Paulo, apesar de não terem recorrido a representações de tipo visual nos registos que apresentaram, revelaram, tal como o par anterior, ter identificado a posição ocupada pelos grupos de cubos unitários com um determinado número de faces de chocolate, no cubo de aresta 3 (Figura 83).

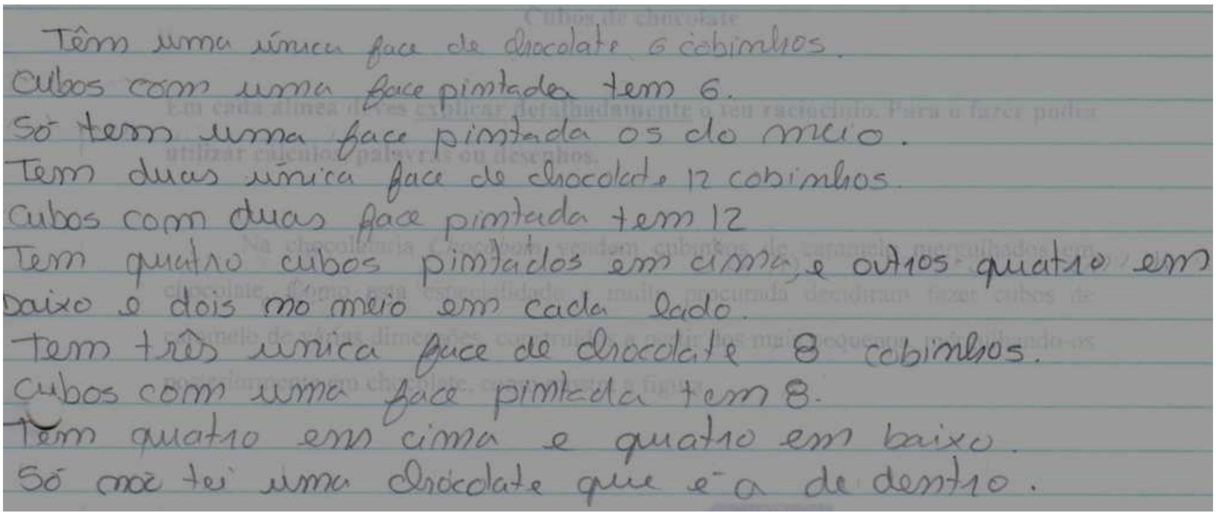

Têm uma única face de chocolate 6 cobinhos.
Cubos com uma face pintada tem 6.
Só tem uma face pintada os do meio.
Tem duas única face de chocolate 12 cobinhos.
Cubos com duas face pintada tem 12
Tem quatro cubos pintados em cima, e outros quatro em
baixo e dois no meio em cada lado.
Tem três única face de chocolate 8 cobinhos.
Cubos com uma face pintada tem 8.
Têm quatro em cima e quatro em baixo.
Só nõe tei uma chocolate que é a de dentro.

Figura 83 - Resolução da questão *1* da Tarefa 7 apresentada por um par de alunos – Turma B

Na resolução da segunda questão da tarefa os alunos voltaram a utilizar a contagem como estratégia de generalização. É de referir que todos os grupos optaram por estudar apenas um caso, o cubo de aresta 4. A abordagem adoptada pelos alunos foi em tudo semelhante à utilizada na resolução da questão anterior. Construíram o cubo escolhido e contaram o número de cubos unitários com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate. Dos nove grupos desta turma, destaca-se um que apresentou valores incorrectos para o número de cubos de cada tipo, os restantes grupos conseguiram efectuar correctamente a contagem. Os dois pares que tinham verificado a validade dos resultados na primeira questão, confrontando-os com o volume do cubo, repetiram este procedimento para o cubo de aresta 4.

Na última questão da tarefa, quase todos os alunos tentaram manter a mesma estratégia que vinham a utilizar, a contagem. No entanto, rapidamente concluíram que não tinham cubos de encaixe suficientes para construir um cubo de aresta 10. Perante esta situação, a maioria dos alunos não foi capaz de se libertar da modelação e resolver o problema para um termo mais distante. Apenas cinco pares arriscaram uma resposta a esta questão, mas nenhum conseguiu resolvê-la integralmente. Todos concluíram que, num cubo de aresta 10, "há 8 cubos com 3 faces de chocolates". Somente um grupo foi mais além, tendo identificado que "o número de cubinhos com uma face de chocolate é 6×64".

Tabela 39 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma B na Tarefa 7

Questões	***C***	*TU*$_1$	*TU*$_2$	*TU*$_3$	***TU***	*D*$_1$	*D*$_2$	*D*$_3$	***D***	***E***	***TE***	*NC*
1	**9**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	-
2	**9**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	-
3	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**5**	**-**	4

A Tabela 39 sintetiza as estratégias de generalização adoptadas pelos alunos na resolução da tarefa *Cubos de chocolate*. Como se pode observar a contagem foi a estratégia privilegiada nas questões de generalização próxima. Nestes casos, os alunos construíram os cubos pretendidos com o material fornecido e contaram o número de cubos unitários com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate. No entanto, esta estratégia nem sempre foi eficaz, tendo conduzido alguns alunos a respostas erradas quando usaram processos de contagem não organizados. Na generalização distante, predominou a estratégia explícita, mas nenhum par conseguiu resolver integralmente esta questão, identificando apenas algumas relações espaciais que conduziram à descoberta do número de cubos unitários com 3 e com 1 face de chocolate. As dificuldades evidenciadas na generalização distante e também na utilização da contagem podem estar relacionadas com a visualização espacial. A maioria não conseguiu identificar relações espaciais e libertar-se do suporte concreto.

11.3.8. Síntese da exploração das tarefas

Em geral, os alunos desta turma mostraram-se bastante empenhados na resolução das tarefas propostas ao longo da experiência de ensino. Quando questionados acerca das tarefas que mais gostaram, o destaque foi para aquelas que envolveram a utilização de material concreto, nomeadamente as tarefas *Dobragens* e *Cubos de chocolate*, argumentando que nunca tinham usado na aula de Matemática ou que, dessa forma, podiam "experimentar o que acontecia". Apesar do material utilizado ter constituído um factor de motivação, nenhuma das tarefas anteriores se diferencia como aquela em que a turma registou melhores resultados. O melhor desempenho destes alunos verificou-se na tarefa *A Pizzaria Sole Mio*, tendo demonstrado ser mais bem sucedidos na escolha de estratégias adequadas aos diferentes níveis de generalização propostos.

Durante as sessões de discussão, promovidas após a exploração de cada tarefa, os alunos demonstraram o mesmo nível de envolvimento. A maioria esperava a oportunidade de poder apresentar as suas propostas de resolução e, ao mesmo tempo, compreender a desadequação de algumas das estratégias utilizadas. Essencialmente, estes momentos possibilitaram a discussão de diferentes abordagens na resolução do mesmo problema, permitindo aos alunos avaliar quais as estratégias com que se sentiam mais confortáveis.

De forma a analisar o trabalho desenvolvido pelos alunos nesta fase do estudo, procedeu-se à categorização das estratégias de generalização por eles adoptadas na exploração de cada uma das tarefas propostas. Para cada tarefa, foi construída uma tabela na qual se apresentava o número de vezes que dada estratégia tinha sido utilizada e em que contexto, generalização próxima ou distante. Optou-se então por concentrar a informação relativa às sete tarefas na Tabela 40, na qual se pode observar a percentagem de utilização de cada uma das estratégias de generalização.

Tabela 40 - Percentagem de utilização das estratégias por tarefa – Turma B

Tarefa	C	TU_1	TU_2	TU_3	D_1	D_2	D_3	E	TE	NC
Os lembretes da Joana	22	22	7	-	-	7	6	22	-	14
Piscinas	25	-	-	-	-	-	-	44	8	23
Sequência de números	-	-	-	2	56	-	-	27	-	15
A Pizzaria Sole Mio	25	-	-	-	-	3	3	67	-	2
Dobragens	8	3	-	-	72	-	-	-	-	17
Sequência de losangos	7	-	-	-	-	-	-	59	17	17
Cubos de chocolate	67	-	-	-	-	-	-	19	-	14

Como se pode verificar, ao longo da experiência de ensino, todas as estratégias definidas na categorização adoptada neste estudo foram utilizadas pelos alunos da turma B, nomeadamente: contagem, termo unidade, diferença, explícita e tentativa e erro. Tendo em conta estas categorias, constata-se que a tarefa *Os lembretes da Joana* foi aquela que deu lugar a uma maior diversidade de estratégias. Nesta tarefa, os alunos utilizaram quatro dos cinco grupos de estratégias, deixando de fora apenas a tentativa e erro. A informação apresentada na Tabela 40 fornece ainda indicadores acerca da predominância de algumas estratégias nas diferentes tarefas. As tarefas *Piscinas* e *Sequência de losangos* potenciaram, de forma clara, a utilização da estratégia explícita. Nestas tarefas a maioria dos alunos identificou regras que relacionavam de forma imediata as variáveis dependente e independente, no primeiro caso entre as dimensões da piscina e o número de azulejos de cada cor e no segundo caso entre o lado do losango e o número de peças que o constituem. Nas tarefas *Sequência de números* e *Dobragens* destacou-se também de forma evidente a utilização da estratégia recursiva. Nestas duas tarefas os alunos identificaram a variação ocorrida entre termos consecutivos das sequências apresentadas e optaram por esta abordagem mesmo na resolução de questões de generalização distante. Por fim, na tarefa *Cubos de chocolate* registou-se uma preferência pela contagem. A maioria dos alunos centrou-se nos cubos de encaixe para identificar o número de cubos com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate, contando-os directamente a partir do material.

Analisando ainda a frequência de utilização de cada estratégia, nas sete tarefas propostas, conclui-se que a contagem e a explícita foram aplicadas em quase todas as tarefas. Como se pode verificar, a estratégia contagem só não surgiu na tarefa *Sequência de números*, tendo sido aplicada em todas as outras tarefas, maioritariamente em situações de generalização próxima. Na tarefa *Sequência de números*, apesar de existir uma componente visual nesta tarefa, os alunos privilegiaram o contexto numérico, o que fundamente a não utilização da contagem. A estratégia explícita foi também uma das estratégias mais utilizadas, especialmente em situações de generalização distante, salientando-se a sua ausência em apenas uma tarefa, *Dobragens*. Perante um padrão de tipo exponencial, estes alunos não foram capazes de formular uma regra que relacionasse o número de dobragens com o número de partes em que a folha ficaria dividida. O recurso à estratégia diferença foi menos frequente comparativamente às duas referidas anteriormente. Nas tarefas *Piscinas*, *Sequência de losangos* e *Cubos de chocolate* não houve registo da aplicação da diferença, o que pode estar relacionado com a estrutura não linear dos padrões envolvidos, mas também pode dever-se ao facto de terem subjacentes conceitos de natureza geométrica que podem ter tornado complexa a utilização desta estratégia. Analisando a forma como os alunos aplicaram esta estratégia conclui-se que privilegiaram a sua componente recursiva (D_1) que, contrariamente ao que seria expectável, surgiu tanto na generalização próxima como distante. A estratégia termo unidade apenas foi utilizada nas tarefas *Os lembretes da Joana*, *Dobragens* e *Sequência de números*, mas apenas nesta com sucesso. Relativamente à estratégia tentativa e erro, surgiu somente em duas tarefas, *Piscinas* e *Sequência de losangos*, aplicada na resolução de questões que implicavam a reversibilidade do pensamento.

À excepção das tarefas *Sequência de números* e *Dobragens*, os alunos desta turma privilegiaram sempre estratégias de natureza visual, em particular, a contagem e a explícita.

Achou-se ainda pertinente analisar o nível de eficácia das estratégias utilizadas em cada tarefa. Na Tabela 41 pode observar-se a percentagem de aplicações correctas de cada uma das estratégias de generalização, nas sete tarefas exploradas.

Tabela 41 - Eficácia das estratégias de generalização em cada tarefa (em percentagem) – Turma B

Tarefa	C	TU_1	TU_2	TU_3	D_1	D_2	D_3	E	TE
Os lembretes da Joana	100	0	0	-	-	0	100	83	-
Piscinas	100	-	-	-	-	-	-	94	33
Sequência de números	-	-	-	100	100	-	-	100	-
A Pizzaria Sole Mio	100	-	-	-	-	0	0	100	-
Dobragens	67	0	-	-	88	-	-	-	-
Sequência de losangos	100	-	-	-	-	-	-	100	100
Cubos de chocolate	89	-	-	-	-	-	-	0	-

Analisando o nível de eficácia das estratégias de natureza visual, verifica-se que a contagem foi quase sempre utilizada de forma adequada. No entanto, destacam-se duas tarefas, *Dobragens* e *Cubos de chocolate*, nas quais alguns alunos que aplicaram a contagem não foram bem sucedidos, nomeadamente em questões de generalização distante ou através de contagens não organizadas. À semelhança da contagem, a estratégia explícita também evidencia um nível de eficácia elevado, salientando-se alguns casos em que as dificuldades dos alunos com alguns conceitos e capacidades, especialmente no âmbito da geometria, condicionando o sucesso dos alunos na utilização desta abordagem. As estratégias TU_3 e D_3 raramente foram aplicadas. Estas estratégias implicam um ajuste final baseado no contexto do problema, o que nem sempre se afigura fácil para os alunos, o que poderá fundamentar o nível de eficácia zero na tarefa *A Pizzaria Sole Mio*, já que neste caso o ajuste não foi efectuado de forma correcta.

Entre as estratégias não visuais, a recursiva (D_1) é aquela que evidencia maior nível de eficácia sempre que foi utilizada. A tentativa e erro foi utilizada pelos alunos em situações que envolviam a reversibilidade do pensamento e verificou-se que apresenta um nível de eficácia razoável, salvo situações em que os alunos são influenciados pelas dificuldades sentidas com alguns conceitos, como sucedeu na resolução da tarefa *Piscinas*. A maioria das tarefas propostas tinham subjacentes padrões cuja estrutura não poderia ser modelada pela proporcionalidade, o que tornava desadequada a utilização de estratégias como TU_1, TU_2 e D_2. Alguns alunos restringiram o seu trabalho ao contexto numérico, negligenciando o significado dos valores manipulados, e adoptaram estas estratégias em situações às quais não se adequavam.

11.4. Desempenho dos alunos no pós-teste

A segunda aplicação do teste teve lugar no final do ano lectivo, após a experiência de ensino. Foram utilizados os mesmos procedimentos de análise que tinham sido aplicados aos resultados do pré-teste, integrando dados de natureza quantitativa e qualitativa.

As respostas dos alunos foram classificadas de acordo com a escala de avaliação construída neste estudo e procedeu-se ao cálculo das classificações médias por questão, de forma a estabelecer uma comparação com os resultados relativos ao pré-teste.

Tabela 42 - Médias das classificações da Turma B no pré-teste e no pós-teste

Questão	Pré-teste	Pós-teste
1.1	1,78	3,17
1.2	3,28	3,56
1.3	3,44	3,56
1.4	2,72	3,44
1.5	3,28	3,61
1.6	0,83	0,78
1.7	3,44	3,61
1.8	2,33	3,44
1.9	3,22	3,28
1.10	4,00	3,94
1.11	2,17	3,39
1.12	2,22	3,06
1.13	0,89	2,28
1.14	2,11	3,33
1.15	1,06	1,28
1.16	2,89	3,83
2.1	0,61	3,11
2.2	0,39	2,39
2.3	0,06	0,83
3.1	0,61	0,94
3.2	0,50	0,89

Para comparar os resultados apresentados na Tabela 42, relativos ao pré-teste e ao pós-teste, optou-se por fazer uma análise tendo por base cada uma das tarefas propostas no teste, nomeadamente: *Continuar sequências*, o *Problema das missangas* e o *Problema dos rectângulos*.

11.4.1. Tarefa 1 – Continuar sequências

Em média, os resultados dos alunos na primeira tarefa do teste melhoraram. As sequências que registaram uma diferença mais significativa foram as apresentadas nas questões *1.1* e *1.13*, precisamente duas das sequências em que os alunos revelaram maiores dificuldades na resolução do pré-teste. Houve um maior número de alunos a conseguir identificar a estrutura destes dois padrões visuais, descobrindo as alterações produzidas nas figuras ao passar de um termo para o seguinte. Na sequência dos números triangulares (questão *1.1*), o número de alunos que conseguiram conjugar a quantidade de pontos em cada figura com a sua disposição espacial aumentou significativamente. Na sequência dos *Z's* verificou-se, por comparação com o pré-teste, que mais alunos identificaram a variação das duas dimensões, no entanto alguns ainda demonstraram dificuldades na representação dos dois termos seguintes.

É ainda pertinente analisar os resultados relativos às restantes sequências em que os alunos revelaram piores resultados no pré-teste, nomeadamente a dos quadrados perfeitos (questão *1.6*) e a dos polígonos (questão *1.15*). No primeiro caso verificou-se uma ligeira descida nas classificações do pós-teste, o que significa que a maioria dos alunos continuou a exibir grandes dificuldades no prolongamento desta sequência. Muitos optaram por não responder a esta questão e, entre os restantes, surgiram novamente interpretações não expectáveis acerca da variação entre termos consecutivos, tal como já tinha sucedido no pré-teste. Na continuação da sequência de polígonos, os alunos evidenciaram as mesmas dificuldades que já tinham revelado na primeira aplicação do teste, interpretando este padrão como sendo de repetição.

Tal como no pré-teste, os resultados associados à continuação dos padrões de repetição superaram os de crescimento, embora os alunos tenham melhorado o seu desempenho nestes últimos.

11.4.2. Tarefa 2 – Problema das missangas

Os alunos apresentaram melhores resultados nesta tarefa, no pós-teste, tanto na generalização próxima como na generalização distante, embora as diferenças mais significativas se tenham registado no primeiro tipo de questões (*2.1* e *2.2*). Para melhor compreender estes resultados é fundamental analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução desta tarefa (Tabela 43).

Tabela 43 - *Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma B no problema 2 do pós-teste*

Questões	**C**	TU_1	TU_2	TU_3	**TU**	D_1	D_2	D_3	**D**	**E**	**TE**	NC
2.1	**11**	-	-	1	**1**	5	-	-	**5**	**-**	**-**	1
2.2	**2**	-	-	1	**1**	9	-	1	**10**	**2**	**-**	3
2.3	**1**	2	-	1	**3**	5	-	2	**7**	**2**	**-**	5

Para abordarem a generalização próxima privilegiaram estratégias adequadas a questões desta natureza, nomeadamente a contagem e a estratégia recursiva (D_1). A contagem foi a estratégia mais utilizada na descoberta do 3.º termo da sequência, no entanto, no cálculo do 8.º termo os alunos deram preferência ao raciocínio recursivo. Apesar de se registar em apenas dois casos, salienta-se a utilização da estratégia explícita na resolução da questão *2.2*. Estes alunos descobriram uma regra que lhes permitiu determinar o número de missangas de cada cor, conhecendo o número de flores. Surgiram ainda, de forma pontual, as estratégias TU_3 e D_3. Comparando os resultados obtidos pelos alunos nestas questões, verifica-se que a média das classificações diminuiu, devido à utilização desadequada de algumas estratégias. Uma destas situações relaciona-se com a contagem, já que os alunos determinaram o número de missangas com base numa representação errada do colar, sendo mais notório no colar com 8 flores. Ainda na questão *2.2*, o aluno que recorreu à estratégia TU3 ajustou o resultado de forma errada.

À semelhança do pré-teste, os alunos continuaram a revelar maiores dificuldades com a generalização distante, embora nesta segunda aplicação do teste tenham sido mais bem sucedidos. Apesar de constituírem processos exaustivos quando se está perante a descoberta de um termo distante, alguns alunos utilizaram a contagem e a estratégia recursiva (D_1), o que nem sempre os conduziu a uma resposta correcta. Destacam-se 4 alunos que identificaram formas mais directas para determinar o número de missangas, aplicando as estratégias explícita e múltiplo da diferença com ajuste (D_3), tendo determinado correctamente o que era solicitado. A estratégia TU_3 voltou a ser aplicada, no entanto o aluno que optou por esta abordagem fez um ajuste errado do resultado. Por fim, destaca-se a utilização indevida da estratégia termo unidade sem ajuste (TU_1). Com o aumento da ordem do termo, estes alunos desistiram de estratégias como a contagem e a recursiva, passando a aplicar um raciocínio proporcional.

A partir da Tabela 43 verifica-se que, à medida que a ordem do termo aumenta, os alunos tendem a utilizar estratégias não visuais. Apenas na questão *2.1* predominam as estratégias visuais, em particular a contagem.

	Estratégias visuais (%)				Estratégias não visuais (%)				
	C	TU_3	D_3	E	TU_1	TU_2	D_1	D_2	TE
2.1	73	100	-	-	-	-	100	-	-
2.2	0	0	100	100	-	-	100	-	-
2.3	0	0	100	100	0	-	40	-	-

Figura 84 - Eficácia de cada estratégia na resolução do problema 2 – Turma B

Na Figura 84 representa-se a eficácia de cada uma das estratégias de generalização utilizadas pelos alunos. Conclui-se que, à excepção da contagem e da estratégia TU_3, as estratégias visuais adoptadas revelaram-se adequadas às situações em que foram aplicadas. No caso da contagem, foram identificados alguns erros associados à representação dos colares que se revelou algo complexa para os alunos, devido à forma hexagonal das missangas e à disposição espacial das mesmas. A estratégia TU_3 nem sempre foi aplicada de forma correcta, reflectindo-se nos ajustes efectuados ao resultado. No que refere às estratégias não visuais, apenas a recursiva se adequou ao contexto do problema proposto, no entanto nem sempre foi uma estratégia eficaz ao nível da generalização distante.

11.4.3. Tarefa 3 – Problema dos rectângulos

Comparando os resultados do pós-teste e do pré-teste, no que refere a esta tarefa, não são identificadas diferenças significativas. Os alunos continuaram a evidenciar o mesmo tipo de dificuldades. Para além de envolver capacidades de visualização espacial, associadas à identificação dos diferentes rectângulos, este problema contempla figuras não transparentes, o que pode ter contribuído para que o nível de insucesso se mantivesse.

Tabela 44 - Estratégias aplicadas pelos alunos da Turma B no problema 3 do pós-teste

Questões	**C**	TU_1	TU_2	TU_3	**TU**	D_1	D_2	D_3	**D**	**E**	**TE**	NC
3.1	**13**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	5
3.2	**12**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	**-**	**-**	6

Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos em cada uma das questões desta tarefa (Tabela 44), verifica-se que, tal como no pré-teste, privilegiaram a contagem, tanto na generalização próxima como distante. A forma como os alunos utilizaram esta estratégia não permitiu que identificassem todos os rectângulos. A maioria dos alunos descobriu apenas os rectângulos de menores dimensões e o de maior dimensão e apenas alguns descobriram outros rectângulos para além destes.

	Estratégias visuais (%)				Estratégias não visuais (%)				
	C	TU_3	D_3	E	TU_1	TU_2	D_1	D_2	TE
3.1	0	-	-	-	-	-	-	-	-
3.2	0	-	-	-	-	-	-	-	-

Figura 85 - Eficácia de cada estratégia na resolução do problema 3 – Turma B

Depreende-se assim que apenas utilizaram uma das estratégias definidas na categorização usada neste estudo. Privilegiaram no seu trabalho uma estratégia de natureza visual que não se traduziu numa abordagem eficaz, já que ao ser utilizada de forma desorganizada não lhes permitiu identificar o padrão associado ao problema.

11.5. Análise comparativa dos resultados do pré-teste e do pós-teste

Na secção anterior, procedeu-se à análise dos resultados dos alunos no pós-teste, estabelecendo uma comparação com o seu desempenho no pré-teste, no que refere às estratégias de generalização utilizadas, dificuldades emergentes do seu trabalho e à influência da visualização no seu raciocínio. No entanto, é também fundamental recorrer a processos estatísticos que permitam, de uma forma mais objectiva, estudar a evolução dos alunos, analisando o impacto da experiência de ensino no seu desempenho.

Na Figura 86 apresenta-se a distribuição das classificações dos alunos da turma B no pré-teste e no pós-teste. O diagrama de extremos e quartis permite explorar e sintetizar os dados, mas também analisar frequências e identificar observações aberrantes (*outliers*). Os diagramas apresentados foram construídos com base nas classificações globais dos alunos, em cada uma das aplicações do teste, numa cotação máxima de 84 pontos.

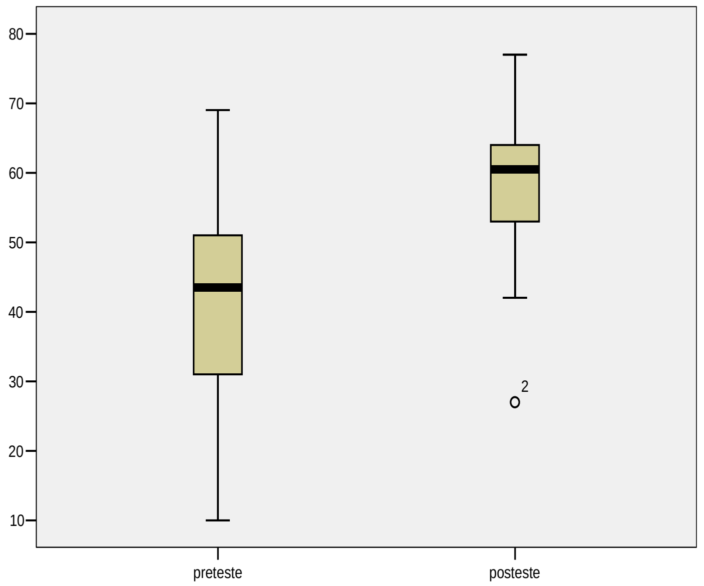


Figura 86 - Distribuições dos resultados do pré-teste e do pós-teste – Turma B

Comparando os diagramas relativos ao pré-teste e ao pós-teste, conclui-se que a turma B melhorou o seu desempenho da primeira para a segunda aplicação do teste. Ao conjugar a informação apresentada na Figura 86 com os valores relativos às medidas de localização (Tabela 45), verifica-se que no pré-teste a amplitude amostral é maior e a dispersão dos dados também.

Tabela 45 - Medidas de localização relativas aos resultados do pré-teste e do pós-teste – Turma B

	Pré-teste	Pós-teste
Média	41,(6)	57,7
Mínimo	10	27
1º Quartil (Q_1)	30,75	52
Mediana	43,5	60,5
3º Quartil (Q_3)	53,25	64
Máximo	69	77

No pré-teste a observação mínima corresponde a 10 pontos e a observação máxima é de 69 pontos, não havendo registo de *outliers*. No pós-teste, a turma B apresenta uma classificação mínima de 27 pontos, pontuação mais elevada do que o valor correspondente no pré-teste, e uma observação máxima de 77 pontos. Embora nesta distribuição se registe um *outlier* correspondente a 27 pontos entendeu-se manter esse elemento na amostra. A análise da distância inter-quartil nas duas distribuições, permite concluir que no pré-teste 50% dos alunos obtiveram classificações situadas entre 30,75 e

53,25 pontos, enquanto no pós-teste esses limites passaram a ser de 52 e 64 pontos. Em geral, estes dados revelam a existência de diferenças no desempenho dos alunos da turma B do pré-teste para o pós-teste.

De forma a analisar se estas diferenças são significativas e compreender os efeitos da experiência de ensino no desempenho dos alunos da turma B, procedeu-se à comparação deste grupo de alunos com o grupo de controlo. Assim, optou-se por recorrer à análise de covariância (ANCOVA), estipulando como factor o grupo (2=Turma B; 3=Grupo de controlo), como variável dependente os resultados do pós-teste e como covariante os resultados do pré-teste. A variável pré-teste é considerada como variável independente de modo a controlar, pelo menos parcialmente, a sua influência no desempenho dos alunos no pós-teste, permitindo, desse modo, a análise da relação directa entre a variável dependente (pós-teste) e o factor (grupo).

Antes de aplicar a ANCOVA é imperativo verificar os pressupostos que lhe estão subjacentes, nomeadamente: normalidade das distribuições; homogeneidade das variâncias; relação linear entre a covariante e a variável dependente; homogeneidade das rectas de regressão; e a fiabilidade da medição da covariante.

As tabelas 46 e 47 dizem respeito aos valores obtidos a partir dos testes de normalidade, para as distribuições dos resultados da Turma B e do grupo de controlo, no pré-teste e no pós-teste, respectivamente.

Tabela 46 - Testes de normalidade para a distribuição dos resultados dos testes – Turma B

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Pré-teste	,102	18	,200(*)	,969	18	,788
Pós-teste	,190	18	,085	,923	18	,144

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

Tabela 47 – Testes de normalidade para a distribuição dos resultados dos testes – Grupo de controlo

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Pré-teste	,102	27	,200(*)	,971	27	,624
Pós-teste	,139	27	,196	,947	27	,183

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

Dado que, em qualquer um dos casos, *p*>0,05, conclui-se que as distribuições analisadas não são significativamente diferentes da distribuição normal, tanto no pré-teste como no pós-teste.

Para analisar a homogeneidade das variâncias utilizou-se o teste de Levene. Na Tabela 48 podem ser observados os valores relativos à aplicação do teste referido.

Tabela 48 - Teste da homogeneidade das variâncias para a variável pós-teste – Turma B e Grupo de controlo

		Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Pós-teste	Based on Mean	2,131	1	43	,152
	Based on Median	1,676	1	43	,202
	Based on Median and with adjusted df	1,676	1	43,000	,202
	Based on trimmed mean	2,219	1	43	,144

Neste caso, testa-se se a variável dependente, ou seja os resultados obtidos no pós-teste, apresenta variâncias semelhantes para os dois grupos em estudo, a turma B e o grupo de controlo. Tendo por base a média, observa-se que F(1,43)=2,131 e *p*>0,05, o que significa que as variâncias não são significativamente diferentes, verificando assim o pressuposto de homogeneidade das variâncias.

De forma a estudar a linearidade entre a covariante (pré-teste) e a variável dependente (pós-teste) procedeu-se ao cálculo do coeficiente de correlação de Pearson (*r*), para a turma B e para o grupo de controlo, com o objectivo de medir a intensidade da associação linear existente entre as duas variáveis.

Tabela 49 - Correlação entre pré-teste e pós-teste – Turma B

		Pré-teste	Pós-teste
Pré-teste	Pearson Correlation	1	0,568*
	Sig. (2-tailed)		0,14
	N	18	18
Pós-teste	Pearson Correlation	0,568*	1
	Sig. (2-tailed)	0,14	
	N	18	18

*. Correlation is significant at the 0,05 level (2-tailed).

Ao analisar a informação apresentada na Tabela 49, verifica-se que o coeficiente de correlação é positivo (r=0,568), existindo uma relação linear estatisticamente significativa (p<0,05) entre as duas variáveis.

Tabela 50 - Correlação entre pré-teste e pós-teste – Grupo de controlo

		Pré-teste	Pós-teste
Pré-teste	Pearson Correlation	1	0,768**
	Sig. (2-tailed)		0,000
	N	27	27
Pós-teste	Pearson Correlation	0,768*	1
	Sig. (2-tailed)	0,000	
	N	27	27

**. Correlation is significant at the 0,01 level (2-tailed).

No que refere ao grupo de controlo (Tabela 50), também se conclui que o coeficiente de correlação é positivo (r=0,768), existindo uma relação linear estatisticamente significativa (p<0,01) entre as duas variáveis estudadas.

A análise da homogeneidade das rectas de regressão permite verificar se a interacção entre a covariável (pré-teste) e o factor (grupo) é significativa.

Tabela 51 - Homogeneidade das rectas de regressão na interacção grupo – pré-teste

Source	Type III Sum of Squares	Df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	5335,614(a)	3	1778,538	20,738	,000
Intercept	4852,203	1	4852,203	56,577	,000
Grupo	745,787	1	745,787	8,696	,005
Pré-teste	2925,903	1	2925,903	34,116	,000
grupo * pré-teste	136,685	1	136,685	1,594	,214
Error	3516,297	41	85,763		
Total	122053,000	45			
Corrected Total	8851,911	44			

a R Squared = ,603 (Adjusted R Squared = ,574)

A Tabela 51 mostra que F(1,41)=1,594 e p>0,05, indicando que não existe uma interacção significativa entre os resultados do pré-teste e o grupo, o que implica que o pressuposto de homogeneidade das rectas de regressão não é violado, permitindo desta forma analisar o impacto do factor (grupo) na variável dependente (pós-teste).

Acrescenta-se ainda que a fiabilidade da covariante (pré-teste) foi medida antes do início da experiência de ensino, usando o alpha de Cronbach. O valor obtido através deste procedimento foi 0,845, o que constitui um índice de fiabilidade considerado bom (Fraenkel e Wallen, 1990).

Após a verificação de todos os pressupostos, passou-se à análise de covariância, cujos resultados se apresentam na Tabela 52.

Tabela 52 - Análise de covariância – Turma B e Grupo de controlo

Source	Type III Sum of Squares	Df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	5198,929(a)	2	2599,464	29,887	,000
Intercept	4725,207	1	4725,207	54,328	,000
Pré-teste	3481,295	1	3481,295	40,026	,000
grupo	2090,298	1	2090,298	24,033	,000
Error	3652,982	42	86,976		
Total	122053,000	45			
Corrected Total	8851,911	44			

a R Squared = ,587 (Adjusted R Squared = ,568)

Como se pode observar, houve diferenças significativas entre os sujeitos estudados, resultantes do tipo de grupo em que se encontravam ($F(1,42)=24,033$ e $p<0,05$). Os resultados obtidos pela turma B no pós-teste diferem significativamente dos resultados apresentados pelo grupo de controlo, mesmo depois dos efeitos do desempenho no pré-teste ter sido controlado.

CAPÍTULO 12

O CASO ANDREIA E DIANA

Neste capítulo faz-se uma descrição pormenorizada da participação de duas alunas que acederam integrar o estudo, a Andreia e a Diana. Começa-se por uma descrição de algumas características pessoais e académicas, referindo aspectos particulares das suas vivências e do seu percurso escolar. Posteriormente, é feita a análise do trabalho desenvolvido pelas alunas ao longo do estudo, em particular, na exploração das tarefas propostas durante a experiência de ensino.

12.1. Caracterização das alunas

No início do 6.º ano de escolaridade a Andreia tinha 10 anos. A aluna vive com os pais, a avó materna e um irmão mais novo. Os seus tempos livres são maioritariamente ocupados com actividades extracurriculares promovidas pela Escola que frequenta, nomeadamente o Laboratório de Matemática, o Clube de Línguas e o Clube de Artes Performativas, embora também tenha referido gostar de ver televisão.

Até ao momento do estudo, a Andreia não tinha tido qualquer retenção, tendo concluído o 5.º ano de escolaridade com nível 4 na maioria das disciplinas. Indicou como disciplina favorita o Inglês, por "estar sempre a aprender coisas novas noutra língua" e porque era "boa aluna". Relativamente à disciplina de Matemática, apesar de não a ter destacado como uma das suas disciplinas preferidas, revelou ser uma aluna constante, ao longo do ano lectivo anterior, tendo obtido nível 4 em todos os períodos lectivos. Quando questionada acerca do que mais gostava de fazer nas aulas de Matemática, mostrou-se um pouco reticente em escolher dentro de um leque tão variado de opções, mas acabou por referir a estatística. Em contrapartida revelou sentir por vezes algumas dificuldades "na parte dos sólidos geométricos" principalmente se não tiver um suporte concreto com que trabalhar e afirmou não gostar de resolver problemas.

A Diana iniciou o 6.º ano de escolaridade com 12 anos de idade. Vive com os pais e com uma irmã mais velha. Tal como a Andreia, a Diana frequenta algumas das actividades extracurriculares promovidas pela Escola, no seu caso, o Laboratório de Matemática e o Clube de Línguas.

Antes do início do estudo, a Diana reprovou uma vez, no 4.º ano de escolaridade. O seu aproveitamento escolar era inferior ao da colega, tendo concluído o 5.º ano de escolaridade com nível 3 na maioria das áreas disciplinares. Como disciplinas preferidas destacou o Inglês, assim como a Andreia, e a Educação Física, alegando simplesmente porque gostava mais destas do que das outras. Ao longo do ano lectivo anterior foi sempre aluna de 3 na disciplina de Matemática. Assim como a Andreia, referiu sem hesitar que, nas aulas desta disciplina, não gostava de resolver problemas por achar que eram difíceis. Entre as suas preferências disse que estava a geometria, no entanto não especificou, dentro desta área, o que mais gostava de fazer.

A Andreia e a Diana têm personalidades muito parecidas. São ambas calmas, ponderadas, um pouco introvertidas e muito simpáticas. No entanto, a Andreia é ligeiramente mais participativa nas discussões de grande grupo do que a Diana, evidenciando-se neste aspecto. Outra característica comum às duas é o empenho com que encaram as tarefas que lhes são propostas, demonstrando grande sentido de responsabilidade em todas as actividades em que participam.

Ao observar o trabalho desenvolvido por estas alunas, enquanto par, foi evidente a cumplicidade existente entre as duas. Segundo o Professor, são muito amigas e sempre que podiam demonstravam interesse em trabalhar juntas. Nas sessões de exploração das tarefas, trabalharam efectivamente em grupo, começando por ler a tarefa para posteriormente discutirem as suas ideias. Notou-se o esforço em conseguir fazer um trabalho organizado e fundamentado, procurando muitas vezes ter a opinião da investigadora e do professor. Para todas as tarefas propostas, uma delas ficava responsável, numa fase inicial, pelos registos numa folha de rascunho, e a outra pela redacção da resposta definitiva na folha que iriam entregar à investigadora.

12.2. A exploração das tarefas

Nesta secção descreve-se o trabalho desenvolvido pela Andreia e pela Diana ao longo da experiência de ensino. Neste sentido, é feita uma análise da forma como exploraram cada uma das sete tarefas propostas, focando o tipo de estratégias utilizadas, as dificuldades sentidas e o papel da visualização no seu raciocínio. No final da secção, apresenta-se um balanço do seu desempenho, através da síntese e comparação dos dados resultantes do seu trabalho.

12.2.1. Tarefa 1 - Os lembretes da Joana

A Andreia e a Diana iniciaram a exploração desta tarefa com a representação dos *pioneses* gastos em seis lembretes. Procederam posteriormente à contagem destes elementos, de forma a dar resposta à primeira questão. Na Figura 87 pode observar-se a resolução apresentada pelas alunas, a partir da qual se percebe que identificaram uma forma particular de distribuição dos *pioneses* pelos lembretes.

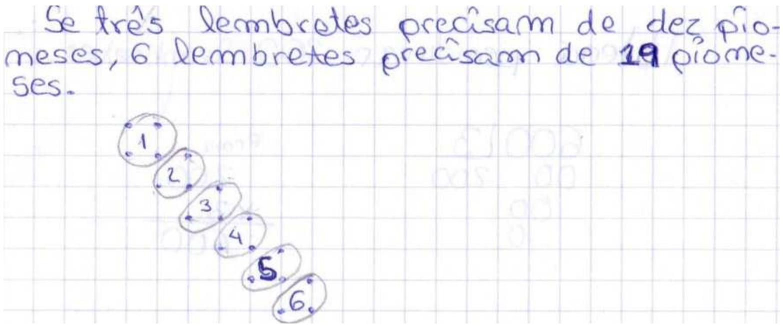


Figura 87 - Resolução da questão *1* da Tarefa 1 apresentada pela Andreia e pela Diana

As alunas destacaram que a sua primeira reacção ao ler a questão *2* da tarefa, foi recorrer à contagem, no entanto aperceberam-se que não seria uma estratégia adequada à generalização distante.

> Andreia: Ao princípio íamos fazer igual [refere-se à utilização da contagem na resolução da questão *2*].
> Investigadora: Como assim igual?
> Diana: O desenho.
> Andreia: Só que depois íamos encher a folha.
> Diana: Ia ficar muito grande e então fizemos o cálculo.

O cálculo que a Diana referiu na entrevista reflecte a aplicação de uma estratégia explícita, resultante do estabelecimento de uma generalização de tipo construtivo. As alunas concluíram que, em todos os lembretes, tinham "grupinhos de 3 *pioneses* e no fim havia mais 1", dando lugar à expressão numérica 35×3+1. Curiosamente, esta regra não é representativa dos agrupamentos que a Andreia e a Diana apresentaram na resolução da primeira questão, na qual se observa a formação de grupos de três *pioneses* em todos os lembretes à excepção do último no qual identificam 4 *pioneses* (Figura 87). Confrontadas com esta situação explicaram que posteriormente verificaram que "o primeiro também tinha 3 *pioneses* e assim sobrava 1".

A terceira questão, embora de generalização distante, como a anterior, envolvia a reversibilidade do pensamento, através do cálculo do número de lembretes, conhecido o número de *pioneses*. Neste caso, as alunas não foram bem sucedidas, utilizando uma estratégia desadequada. Para determinar o número de lembretes e tendo por base os agrupamentos de 3 *pioneses*, que salientaram previamente, efectuaram o cálculo 600÷3, aplicando a estratégia D_2.

> Investigadora: Podem explicar-me o vosso raciocínio na questão *3*?
> Diana: Tínhamos uma caixa com 600 *pioneses* […] E depois fizemos grupinhos de 3.
> Investigadora: Sim! E depois?
> Andreia: 600 a dividir por 3 dava 200 e depois fizemos a prova e dava certo [refere-se ao cálculo 200×3=600]
> Investigadora: Então os cálculos estão correctos. Mas vamos lá ver uma coisa […] como é que os *pioneses* se distribuem pelos lembretes?
> Diana: [Após algum tempo de reflexão] Grupinhos de 3 e mais um no fim.
> Investigadora: Então se fizeram grupinhos de 3 o que aconteceu ao *pionés* que deveriam colocar no fim?
> [Faz-se silêncio]
> Andreia: Já não temos. Isto está errado! [...] Já só dava para 199 lembretes.

Após a discussão, a Andreia e a Diana perceberam o erro cometido, ou seja, a necessidade de efectuar um ajuste do resultado obtido. Destaca-se ainda neste diálogo a concepção que estas alunas têm de prova, limitando-a à verificação de relações numéricas completamente descontextualizadas.

A exploração das questões associadas aos lembretes triangulares foi efectuada de forma similar às anteriores. Na generalização próxima (questão *4.1*), desenharam 6 lembretes triangulares e os respectivos *pioneses*, aplicando assim a contagem. Na generalização distante, apresentaram duas abordagens distintas, recorrendo a uma estratégia explícita na resolução da questão *4.2* e novamente à estratégia D_2, na resolução da questão *4.3*.

	Estratégias de generalização			
Questões	C	D_2	E	
1	X			Generalização Próxima
4.1	X			
2			X	Generalização Distante
3		X		
4.2			X	
4.3		X		

Figura 88 - Síntese das estratégias usadas pela Andreia e pela Diana na Tarefa 1

Como se pode observar na Figura 88, as alunas recorreram a estratégias diferenciadas em questões de generalização próxima e distante. No primeiro caso, aplicaram a contagem e na determinação de termos distantes alternaram entre a estratégia explícita e múltiplo da diferença sem ajuste (D_2). No entanto, em questões com o mesmo tipo de formulação (*1* e *4.1*; *2* e *4.2*; e *3* e *4.3*) optaram por utilizar as mesmas estratégias. As maiores dificuldades foram sentidas no âmbito da generalização distante, no cálculo da ordem associada a um dado termo (questões *3* e *4.3*), reflectidas através da aplicação de estratégias desadequadas. À excepção destas questões, privilegiaram estratégias de natureza visual, como a contagem e a explícita, usando nas suas respostas referências ao contexto do problema.

12.2.2. Tarefa 2 - *Piscinas*

Após a leitura da tarefa e o esclarecimento das dúvidas salientadas pela turma, a Andreia e a Diana iniciaram a sua resolução. Mostraram a calma e o empenho que lhe eram reconhecidos e esforçaram-se para que a sua folha de registo reflectisse um trabalho apresentável e organizado. Para isso, recorreram frequentemente à régua e utilizaram lápis de cor para distinguir os dois tipos de azulejos.

A abordagem inicial a esta tarefa passou pela construção de uma piscina de dimensões 10×4, tendo feito uma representação similar à apresentada no enunciado (questão *1*). Depois de desenharem a piscina pretendida, distinguindo com cores distintas os azulejos centrais e do bordo, procederam à sua contagem (Figura 89).

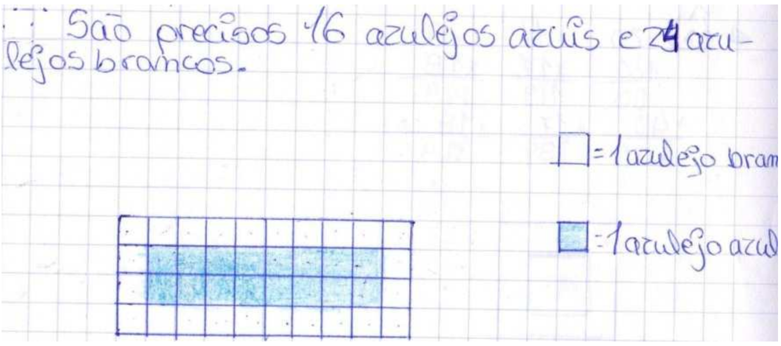


Figura 89 - Resolução da questão *1* da Tarefa 2 apresentada pela Andreia e pela Diana

É notória a preocupação das alunas com a apresentação de um trabalho organizado e cuidado, tendo inclusivamente identificado a unidade de área escolhida na representação que efectuaram.

A questão *2.1* foi resolvida através da descoberta de uma regra explícita, deduzida da análise dos casos já estudados, ou seja, com base na observação das piscinas de dimensões 7×4 e 10×4 (Figura 90).

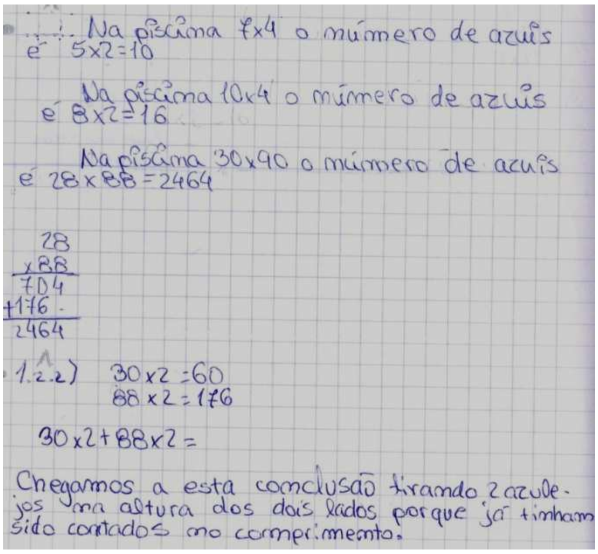


Figura 90 - Resolução das questões *2.1* e *2.2* da Tarefa 2 apresentada pela Andreia e pela Diana

Numa fase inicial, as alunas verificaram como determinariam o número de azulejos azuis nas piscinas anteriores, tendo descoberto uma regra que aplicaram posteriormente à piscina de dimensões 30×90. Embora na folha de resposta tivessem apenas identificado relações de natureza numérica, durante a entrevista, a Andreia e a Diana deixaram claro que a regra encontrada teve por base a análise das representações visuais.

Investigadora: Para determinar o número de azulejos azuis de uma piscina de dimensões 30×90 (questão *2.1*), foram estudar o que acontecia noutros casos. Foi isso?
Diana: Sim! Na primeira era 5×2 [refere-se à piscina de dimensões 7×4] e na outra era 8×2 [refere-se à piscina de dimensões 10×4]. E depois para esta [refere-se à piscina de dimensões 30×90] tinha que ser 28×88.
Investigadora: E como chegaram a esta conclusão? Foi com base nas figuras ou em cálculos?
Andreia: Tiramos sempre 2 à altura e ao comprimento.
Investigadora: Porquê?
Diana: Porque queríamos os azuis.
Andreia: Tiramos os cantos, no comprimento e na largura. E depois multiplicamos.
Investigadora: E de onde vem essa multiplicação?
Andreia: É da área do rectângulo azul.

Para determinar o número de azulejos brancos (questão *2.2*), as alunas voltaram a aplicar uma estratégia explícita, resultante de uma generalização de natureza construtiva, tal como na questão anterior, formulando a expressão numérica 30×2+88×2. Fundamentaram o seu raciocínio referindo: “chegamos a esta conclusão tirando 2 azulejos na altura dos dois lados porque já tinham sido contados no comprimento”.

À semelhança dos restantes elementos da turma, a Andreia e a Diana revelaram algumas dificuldades na primeira abordagem à terceira questão da tarefa. Estiveram atentas à discussão promovida com o objectivo de esclarecer os alunos e, após este momento, retomaram o seu trabalho. Analisando a resposta registada pelas alunas (Figura 91), verifica-se que começaram por aplicar a tentativa e erro já que queriam “ver qual era o número mais próximo de 300”.

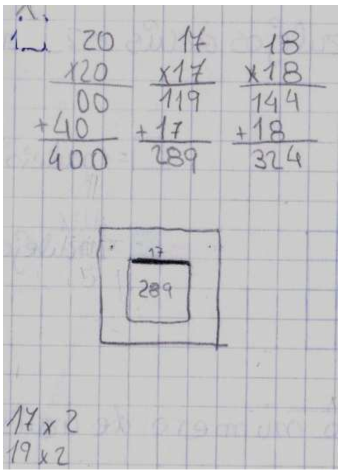


Figura 91 - Resolução da questão *3* da Tarefa 2 apresentada pela Andreia e pela Diana

Na entrevista fundamentaram os cálculos apresentados, referindo a utilização da fórmula da área do quadrado, já que, neste caso, “os azulejos azuis formam um quadrado no meio da piscina”. Após terem concluído que o quadrado central tinha dimensões 17×17, sendo, deste modo, gastos 289 azulejos azuis, construíram um modelo da piscina pretendida associando-lhe os valores que tinham determinado. No cálculo do número de azulejos brancos, limitaram-se a apresentar expressões parcelares, nomeadamente 17×2 e 19×2, sem contextualizar os valores. Na resolução desta questão nota-se uma maior desorganização ao nível da comunicação escrita, mas, segundo as alunas, como já tinham explicado nas questões anteriores o cálculo do número de azulejos de cada cor, não sentiram necessidade de clarificar mais a sua resposta.

	Estratégias de generalização			
Questões	C	E	TE	
1	X			Generalização Próxima
2.1		X		Generalização Distante
2.2		X		
3			X	

Figura 92 - Síntese das estratégias usadas pela Andreia e pela Diana na Tarefa 2

A Andreia e a Diana optaram por estratégias diferentes estratégias na resolução desta tarefa. Na generalização próxima recorreram à contagem, tendo por base a representação visual do termo pretendido, neste caso a piscina de dimensões 10×4. Na generalização distante, embora tivessem mudado de estratégia, continuaram a apoiar o seu raciocínio nas representações visuais já conhecidas, deduzindo daí regras explícitas para determinar o número de azulejos de cada cor. Ao contrário do que aconteceu na tarefa anterior, demonstraram reversibilidade do pensamento, na resolução da questão *3*, utilizando numa fase inicial a tentativa e erro e posteriormente as regras já identificadas para calcular o número de azulejos azuis e brancos. Mostraram-se razoavelmente à vontade com a utilização de conceitos geométricos, nomeadamente o conceito de área.

12.2.3. Tarefa 3 – Sequência de números

Depois de lido o enunciado da tarefa, em grande grupo, as alunas iniciaram o seu trabalho. Nesta fase inicial, tal como os restantes pares, não demonstraram ter dúvidas. No entanto, ao longo da resolução da tarefa foram solicitando, por diversas vezes, a presença da investigadora e do professor, quer para esclarecer dúvidas associadas à interpretação do enunciado, quer para validar a profundidade das suas explicações.

A primeira questão não lhes suscitou dificuldades. Copiaram para a folha de resposta a parte da sequência fornecida no enunciado e, para distinguir as linhas acrescentadas, fizeram esse registo a lápis. À semelhança dos outros grupos usaram a estratégia recursiva (D_1), tendo por base a diferença entre termos consecutivos dispostos por linha.

A exploração da segunda questão trouxe-lhes algumas dificuldades. Na sua resposta não utilizaram linguagem corrente, limitaram-se a reescrever a sequência e acrescentar setas indicativas do posicionamento dos números à medida que se mudava de linha (Figura 93). Quando questionadas acerca deste facto a Andreia afirmou "explicar isto por palavras, é difícil" e a Diana completou dizendo "usamos mais os cálculos".

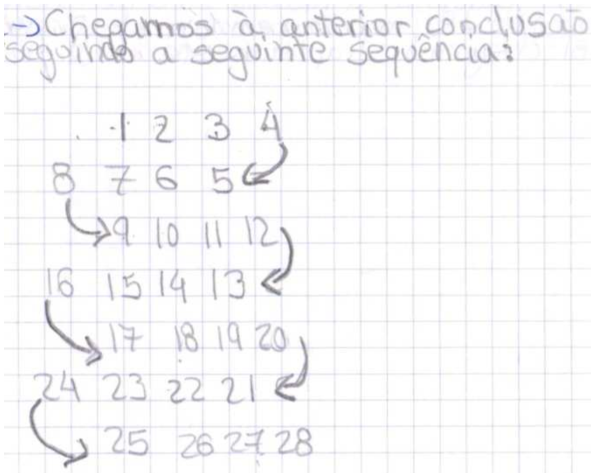


Figura 93 - Resolução da questão *2* da Tarefa 3 apresentada pela Andreia e pela Diana

Perante a resposta apresentada pelas alunas, foi-lhes solicitado, durante a entrevista, que clarificassem o esquema utilizado para explicar a regra de construção da sequência.

> Andreia: Nós reparamos que passava daqui para aqui [refere-se à mudança de linha].
> Investigadora: Expliquem-me melhor o que significam estas setinhas.
> Andreia: Temos do 1 até ao 4 […] e depois […] não continuava […] passava daqui para aqui [aponta e percorre a seta].
> Diana: Do 4 para o 5 muda e fica um espaço.
> Investigadora: E depois?
> Andreia: Temos do 5 até ao 8 e muda outra vez.
> Diana: Sim […] para baixo e deixa-se um espaço.

Percebe-se que a fundamentação das alunas assenta em características associadas ao arranjo espacial dos números que constituem a sequência. Destaca-se ainda, na linguagem utilizada, a referência a casos particulares para explicar a regra, dando assim indícios do estabelecimento de uma generalização factual (Radford, 2008).

Na resolução da questão *3*, identificaram algumas relações numéricas importantes, nomeadamente: “a primeira, a terceira e a quinta colunas são constituídas por números pares e as restantes por números ímpares”; e “na quinta e na primeira colunas estão os números da tabuada do 4”. Descobriram ainda outras relações que não conseguiram traduzir por palavras, optando por assinalá-las na própria sequência (Figura 94).

Figura 94 - Resolução da questão *3* da Tarefa 3 apresentada pela Andreia e pela Diana

Para localizar o número 40 na sequência recorreram a dois tipos de estratégias, uma para determinar a linha e outra para identificar a coluna, tal como se pode concluir da argumentação das alunas na entrevista.

> Diana: Na 1ª coluna era sempre a tabuada do 8.
> Investigadora: Então na 1ª coluna têm os múltiplos de 8. E depois?
> Andreia: Fomos seguir […] juntamos sempre 8 aos números da 1ª coluna, até chegarmos ao 40.

A coluna foi descoberta através da aplicação de uma estratégia explícita, baseada na identificação do posicionamento dos múltiplos de 8. Para a linha, já utilizaram um raciocínio de tipo recursivo, sabendo que termos consecutivos da 1ª coluna diferem em 8 unidades.

Na questão *5* apenas conseguiram localizar o número 81. Neste caso, usaram uma abordagem similar à que tinham aplicado na resolução da questão anterior. Na folha de resposta registaram: "Seguimos a tabuada do 8 até chegarmos ao 80, sabendo onde fica o 80, o 81 está na linha e na coluna a seguir. O 81 está na vigésima primeira linha e na segunda coluna". Conclui-se assim que voltaram a aplicar uma estratégia explícita para descobrir a coluna e a recursiva para identificar a linha.

Quando questionadas sobre o facto de não terem apresentado resposta relativa à posição do número 542, afirmaram ter tentado "na folha de rascunho" mas não conseguiram encontrar uma abordagem eficaz, porque "o número era muito grande e ia demorar muito", admitindo deste modo a desadequação das estratégias, aplicadas previamente, à identificação de termos distantes.

	Estratégias de generalização			
Questões	D_1	E	NC	
1	X			Generalização Próxima
4	X	X		Generalização Distante
5.1	X	X		
5.2			X	

Figura 95 - Síntese das estratégias usadas pela Andreia e pela Diana na Tarefa 3

Analisando a Figura 95, verifica-se que, na resolução desta tarefa, as alunas privilegiaram o raciocínio recursivo, como estratégia de generalização, embora em certos casos o tenham conjugado com a utilização da estratégia explícita. Para além de algumas dificuldades associadas à explicitação do raciocínio, identificadas nas questões *2* e *3*, revelaram ainda dificuldades ao nível da generalização distante, já que não conseguiram encontrar estratégias adequadas a esta situação, tendo mostrado preferência pela estratégia recursiva que não constitui uma abordagem eficaz nestes casos.

12.2.4. Tarefa 4 – *A Pizzaria Sole Mio*

A postura assumida pela Andreia e pela Diana na exploração desta tarefa não foi diferente da demonstrada em sessões anteriores. Destaca-se, em particular, o empenho destas alunas e a preocupação com a apresentação de um trabalho organizado e fundamentado.

Iniciaram a exploração da tarefa, sem colocar qualquer dúvida. Decidiram recorrer a uma representação visual de uma mesa com 10 pizzas para determinar o número de pessoas que aí estariam sentadas (questão *1*). O modelo construído (Figura 96), reflecte o cuidado que a Andreia e a Diana têm com as suas produções escritas, tendo distinguido as pizzas e as pessoas com cores diferentes, para “não se enganarem a contar”.

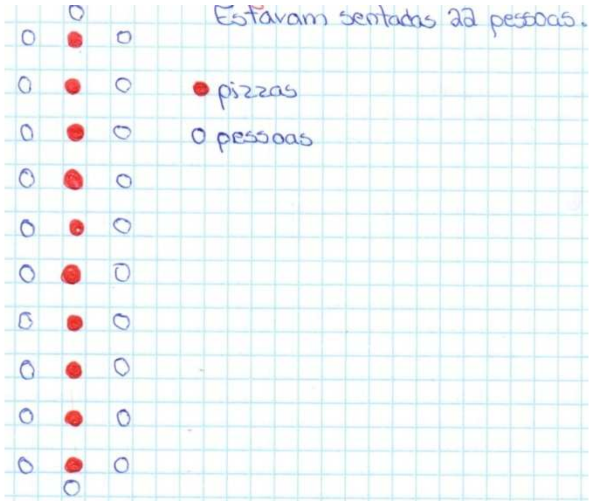


Figura 96 - Resolução da questão *1* da Tarefa 4 apresentada pela Andreia e pela Diana

Na questão *2*, era pedido o 31.º termo da sequência, promovendo deste a modo o estabelecimento da generalização distante. Neste caso, as alunas mudaram de estratégia, abandonando a contagem, “porque eram muitas pizzas”, para utilizar uma estratégia explícita. Não se limitaram a apresentar os cálculos que conduziam à resposta pretendida, tendo-se preocupado em fundamentar o significado dos mesmos, no contexto do problema (Figura 97).

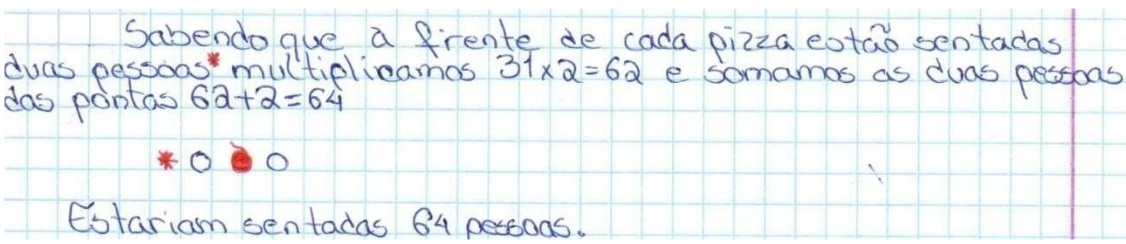


Figura 97 - Resolução da questão *2* da Tarefa 4 apresentada pela Andreia e pela Diana

Formularam uma estratégia explícita, baseada na observação da distribuição das pessoas em relação às pizzas, estabelecendo uma generalização de natureza construtiva, originada pela identificação de conjuntos disjuntos na estrutura do padrão.

Tal como na tarefa *Os lembretes da Joana*, voltaram a demonstrar dificuldades na resolução de questões onde se pede a ordem ocupada por um determinado termo (questão *3*). Neste caso, as alunas mudaram novamente de estratégia, aplicando D_3. Apesar deste tipo de estratégia poder constituir uma abordagem adequada a este género de problemas, a Andreia e a Diana efectuaram o ajuste de forma errada, como se pode concluir do seguinte excerto da entrevista.

> Diana: Primeiro fizemos 58÷2 porque havia 2 filas de lado. E depois fizemos 29–2 para tirar as 2 pessoas das pontas.
> Investigadora: E então o que concluíram?
> Andreia: Que tinha de encomendar 27 pizzas.
> Investigadora: Vou propor-vos uma coisa. Vamos pensar ao contrário. Sabendo que tinham 29 pizzas em cima da mesa, quantas pessoas estariam sentadas?
> [As alunas discutem entre si e resolvem o problema]
> Andreia: Não dá 58!
> Investigadora: Não?!?
> Andreia: Dá 60!
> Investigadora: Então houve aqui qualquer coisa que vos escapou […] Ao fazer 58÷2, têm 29 pessoas. Onde é que as colocam?
> Diana: Nos lados.
> Investigadora: E sentam-se todas nos lados?
> Andreia: Não! Duas têm que ir para as pontas.
> Investigadora: Sendo assim, quantas ficam sentadas em cada lado da mesa?
> Andreia: [Após uma pausa] 28, porque sai uma de cada lado. Afinal são 28 pizzas.

Na questão *4.1* concluíram facilmente que se tratava de um problema que envolvia a divisão. Optaram por modelar a situação utilizando a representação fraccionária da quantidade de pizza que o João comeria em cada caso. E, depois de efectuarem a redução ao mesmo denominador, compararam os números e observaram qual deles era o maior, verificando que o João comeria maior quantidade de pizza na mesa de 10 pessoas.

Na última questão da tarefa, limitaram-se a testar mais um caso, para além do que foi analisado na questão anterior. Decidiram experimentar para uma mesa com 31 pizzas, "porque era o valor que tinha dado na pergunta *2*", e outra com 40 "porque era um número maior". O número de pessoas correspondente a uma mesa com 40 pizzas foi determinado através da estratégia explícita que já tinham utilizado na segunda questão. Depois de comparar estes casos as alunas ficaram convencidas que “para comer mais pizza o João deve convidar mais pessoas”.

	Estratégias de generalização			
Questões	C	D_3	E	
1	X			Generalização Próxima
2			X	Generalização Distante
3		X		
4.2			X	

Figura 98 - Síntese das estratégias usadas pela Andreia e pela Diana na Tarefa 4

Na Figura 98 estão representadas as estratégias utilizadas pela Andreia e pela Diana nas diferentes questões desta tarefa. Na generalização próxima optaram pela contagem, enquanto na generalização distante privilegiaram a estratégia explícita, à excepção da questão *3*. Foi precisamente nesta questão, na qual se promovia a reversibilidade do pensamento, que revelaram maiores dificuldades, utilizando uma estratégia que não adequaram ao contexto do problema proposto. A componente visual esteve quase sempre presente no raciocínio das alunas, sendo perceptível o seu impacto através de estratégias como a contagem e a explícita.

12.2.5. Tarefa 5 – *Dobragens*

Tal como os restantes alunos da turma, a Ana e Diana reagiram com alguma surpresa à proposta de utilização de uma folha de jornal na resolução da tarefa. Mostraram-se bastante motivadas com este facto, ouvindo-se inclusivamente a Diana comentar, com algum entusiasmo, “nunca tínhamos usados uma folha de jornal em Matemática…é giro”. Nesta tarefa, a Andreia assumiu os registos das respostas, na folha que tinham para o efeito, e a Diana ficou encarregue das dobragens.

Depois de a Diana efectuar as dobragens solicitadas na primeira questão, as alunas tentaram formular uma previsão sobre o número de partes em que a folha ficaria dividida. Ao fim de algum tempo de discussão, tendo por base a manipulação da folha, apresentaram a conjectura e a argumentação que se pode observar na Figura 99.

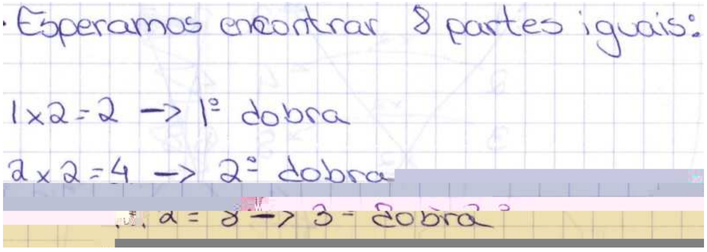


Figura 99 - Resolução da questão *1* da Tarefa 5 apresentada pela Andreia e pela Diana

Analisando a resposta das alunas, depreende-se que a imagem mental que criaram, associada às dobragens efectuadas, conduziu-as a um raciocínio de natureza recursiva. Chegaram à conclusão que cada nova dobragem duplicaria o número de secções encontradas, argumento que clarificaram durante a entrevista.

> Investigadora: Vocês chegaram a esta conclusão antes de abrirem a folha?
> Andreia e Diana: Sim!
> Investigadora: Então expliquem-me como pensaram.
> Diana: Primeiro estávamos um bocadinho confundidas…pensávamos que era 6 partes […] depois já achávamos que eram 8.
> Andreia: Depois vimos que eram 8.
> Investigadora: E como é que viram isso?
> Andreia: Ao dobrar uma vez ficam duas partes. Ao dobrar 2 vezes divide-se outra vez a meio e assim é o dobro e na terceira dobragem é o dobro outra vez.

Na exploração da questão *2*, apesar de terem começado por recorrer à manipulação do material, concluíram que não seria uma abordagem adequada. Optaram por utilizar a regra identificada previamente, duplicando o número de partes em que a folha estaria dividida, até atingirem a sétima dobragem.

> Diana: Nós começamos por dobrar a folha como antes.
> Andreia: Estava a ser difícil dobrar. E ao abrir eram muitas partes.
> Investigadora: E depois?
> Diana: Vimos a regra e continuamos. Fizemos sempre vezes 2

A Andreia e a Diana identificaram limitações físicas no material, na resolução de questões de generalização distante, o que implicou que mudassem de abordagem, deixando a folha de jornal, passando a usar apenas uma estratégia recursiva (D_1).

A questão *3* trouxe-lhes algumas dificuldades. Durante a entrevista, assumiram: “sabemos a regra mas explicar é difícil”. Por isso, optaram por construir uma tabela e, como já tinha sucedido em tarefas anteriores, assinalaram a relação identificada recorrendo a números (Figura 100).

Figura 100 - Resolução da questão *2* da Tarefa 5 apresentada pela Andreia e pela Diana

As alunas identificaram uma regra recursiva (D_1), limitando-se a estabelecer uma relação entre valores consecutivos da variável dependente, quando o que se pretendia era a descoberta de uma regra que relacionasse as duas variáveis envolvidas no problema. No entanto, a entrevista contribuiu para que compreendessem as limitações da regra formulada na determinação de valores distantes. Quando questionadas sobre o que aconteceria após 100 dobragens responderam: “vai demorar muito tempo”; e “vamos ter que calcular todos até 100”.

À semelhança das questões anteriores, na questão *4*, optaram pela estratégia recursiva (D_1). Uma vez que não identificaram uma regra que estabelecesse uma relação imediata entre as variáveis, continuaram a sequência, duplicando o número de partes a cada nova dobragem, até obter 1024 partes.

A última questão da tarefa não trouxe qualquer dificuldade a este par, tendo identificado que se tratava de um problema de áreas. Como os valores pretendidos tinham sido já determinados nas questões *1* e *2*, limitaram-se a dividir 1 por 8 e 1 por 128, optando pela representação fraccionária.

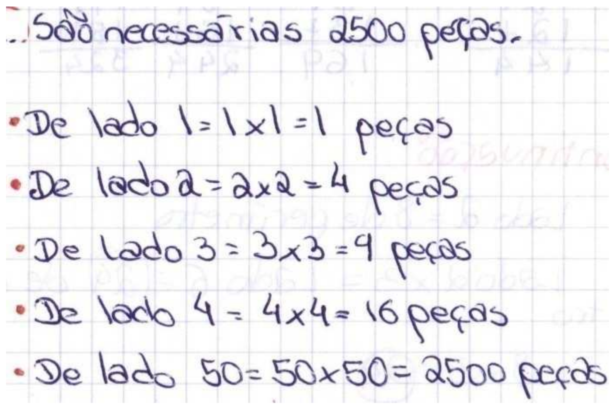
	Estratégias de generalização	
Questões	D_1	
1	X	Generalização Próxima
2	X	Generalização Distante
3	X	
4	X	

Figura 101 - Síntese das estratégias usadas pela Andreia e pela Diana na Tarefa 5

Como é perceptível na Figura 101, a Andreia e a Diana mostraram uma preferência evidente pela estratégia recursiva, tanto em questões de generalização próxima como distante. Embora tenham sido bem sucedidas na resolução da maior parte das questões, destaca-se a desadequação da abordagem adoptada na questão *3*, que não poderia ter sido resolvida de forma recursiva. Salienta-se ainda que voltaram a demonstrar algumas dificuldades na apresentação de uma argumentação estruturada, preferindo explicitar o raciocínio com números do que em linguagem corrente.

12.2.6. Tarefa 6 – Sequência de losangos

Logo após a proposta da tarefa, a Andreia e a Diana iniciaram a sua exploração. Resolveram as duas primeiras alíneas da primeira questão sem evidenciar dificuldades. Para determinar o número de peças necessárias à construção de um losango de lado 4 (questão *1.1*) e de outro de lado 50 (questão *1.2*) aplicaram uma estratégia explícita, deduzida da observação dos três primeiros termos da sequência, fornecidos no enunciado (Figura 102).


São necessárias 2500 peças.

- De lado 1 = 1x1 = 1 peças
- De lado 2 = 2x2 = 4 peças
- De lado 3 = 3x3 = 9 peças
- De lado 4 = 4x4 = 16 peças
- De lado 50 = 50x50 = 2500 peças

Figura 102 - Resolução da questão *1.2* da Tarefa 6 apresentada pela Andreia e pela Diana

As alunas identificaram uma relação entre o lado de cada losango e o número total de peças, verificando que este se obtinha fazendo *lado*×*lado*. Esta regra foi testada com os losangos de lados 1, 2 e 3 e posteriormente aplicada aos losangos de lados 4 e 50. As figuras apresentadas no enunciado foram cruciais na identificação desta regra, permitindo que a Andreia e a Diana ficassem convencidas da sua validade, uma vez que se verificava nos três casos apresentados.

> Investigadora: Vocês encontraram uma regra para determinar o número de peças existentes num losango de lado 4 e num losango de lado 50. Como chegaram a essa conclusão?
> Diana: O lado do losango vezes o lado do losango dá o número de peças.

Investigadora: Essa é a regra. O que eu queria saber é como a encontraram.
Andreia: Nós vimos os losangos. Vimos que lado 1 vezes 1 era uma peça e que lado 2 vezes 2 era 4 e que lado 3 vezes 3 era 9. Dava certo.

A questão *2* promove a reversibilidade do pensamento já que se implica o cálculo do comprimento do lado de um losango com 324 peças. A Andreia e a Diana utilizaram a tentativa e erro, de forma a descobrir o comprimento do lado do losango pretendido. Sabendo que o número de peças necessárias à construção do losango se obtinha do produto $lado \times lado$, experimentaram sucessivos valores até concluírem que $18\times18=324$. Posteriormente, determinaram o perímetro do losango descoberto sem qualquer dificuldade.

As alunas evidenciaram algumas dificuldades na última questão da tarefa. À semelhança da maioria dos alunos da turma, não estavam a conseguir avançar na resolução por não terem "figuras nem números". Após a discussão promovida durante a sessão de exploração da tarefa, compreenderam que teriam de testar alguns casos de modo a encontrar uma regra para cada uma das alíneas. Para analisar a relação entre os perímetros (questão *3.1*) de losangos nas condições estipuladas, estudaram dois casos, os losangos de lados 1 e 3 e os losangos de lados 2 e 6, tendo estabelecido posteriormente a sua conjectura.

Após concluírem que a relação descoberta para os losangos de lados 1 e 3 também se verificava para os losangos de lados 2 e 6, formularam a regra se o lado for o triplo o perímetro também o é".

Andreia: Escolhemos duas figuras que sabíamos. O losango de lado 1 e o losango de lado 3 e calculamos o perímetro. Era o triplo.
Investigadora: Mas não ficaram por aí.
Diana: Porque dizia para experimentar alguns casos [refere-se ao enunciado]. Fomos ver o de lado 2 e o de lado 6.
Andreia: Também era o triplo.

Na resolução da questão *3.2*, usaram os mesmos casos da alínea anterior. Depois de determinarem a área de cada um dos losangos escolhidos, compararam os resultados e verificaram que "quando o lado triplica a área fica 9× maior".

	Estratégias de generalização		
Questões	E	TE	
1.1	X		Generalização Próxima
1.2	X		Generalização Distante
2		X	

Figura 103 - Síntese das estratégias usadas pela Andreia e pela Diana na Tarefa 6

Analisando a Figura 103, destaca-se de imediato a opção pela estratégia explícita, quer na generalização próxima quer na generalização distante. A observação das representações visuais dos três primeiros termos da sequência contribuiu para que a Andreia e a Diana deduzissem desde logo uma regra que relacionava de forma imediata as variáveis lado do losango e número de peças. Nesta tarefa mostraram reversibilidade do pensamento ao resolver sem dificuldades a questão *2*, tendo por base a regra identificada previamente e a utilização da tentativa e erro.

12.2.7. Tarefa 7 – Cubos de chocolate

Após a leitura do enunciado da tarefa, procedeu-se à distribuição do material que iria servir de apoio à resolução. A Andreia e a Diana, tal como os restantes elementos da turma, mostraram-se bastante entusiasmadas perante o facto de poderem utilizar os cubos de encaixe no desenvolvimento do seu trabalho. Esta reacção foi ainda mais notória quando cada uma das alunas decidiu construir o seu próprio cubo de aresta 3 (questão *1*).

Para dar resposta à primeira questão, a Andreia e a Diana utilizaram os modelos que construíram, contando directamente o número de cubos unitários que teriam 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate. À medida que iam contando o número de cubos de cada tipo, foram organizando os dados numa tabela, como se pode observar na Figura 104.

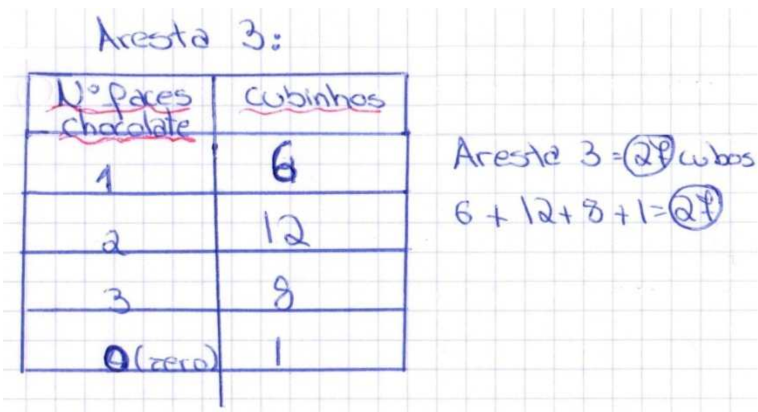


Figura 104 - Resolução da questão *1* da Tarefa 7 apresentada pela Andreia e pela Diana

Estas alunas foram revelando, ao longo do estudo, alguma preocupação com a validação dos resultados obtidos. Nesta tarefa voltaram a mostrar esse cuidado, ao verificar se o número de cubos unitários, contados a partir dos modelos, coincidia com o volume do cubo de aresta 3. De acordo com o que a Andreia e a Diana referiram na entrevistam, para resolver esta questão, efectuaram a contagem dos elementos pretendidos um a um, ou seja, não identificaram a disposição espacial de cada um dos tipos de cubos, o que facilitaria a contagem. Deste modo, o procedimento utilizado pelas alunas justifica inteiramente a verificação dos valores encontrados.

> Investigadora: Queria que me explicassem como chegaram aos valores que estão na tabela.
> Diana: Usamos o cubo e contamos.
> Andreia: Eu usei o meu e a Diana o dela e contamos. Depois víamos se dava igual para não nos enganarmos.
> Investigadora: E como é que fizeram essa contagem? Como contaram os cubinhos?
> Andreia: Contamos stôra. Pegamos no cubo e contamos mesmo.
> Investigadora: Sim, eu percebi! Mas contaram como? Um a um? Ou arranjaram outra forma de os contar?
> Diana: Foi um a um.
> Investigadora: Ok! Também reparei que no final calcularam o volume do cubo de aresta 3 e adicionaram os cubinhos contados. Porquê?
> Andreia: Para confirmar se tínhamos contado bem. Tinha que dar 27.

Na segunda questão da tarefa pedia-se que descobrissem o número de cubos unitários com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate, existentes em cubos de outras dimensões. As alunas decidiram estudar apenas um caso, o cubo de aresta 4, segundo elas “porque era o seguinte”. Para isso, utilizaram os mesmos procedimentos que tinham aplicado na resolução da questão anterior. Começaram por utilizar o material fornecido para construir o cubo que escolheram e posteriormente efectuaram a contagem dos cubos de cada tipo, registando a informação numa tabela semelhante à representada na Figura 104. No final, voltaram a verificar os resultados através do cálculo do volume do cubo de aresta 4.

Apesar de terem tentado resolver a última questão da tarefa, não conseguiram encontrar uma estratégia adequada, deixando a questão sem resposta.

> Investigadora: O que se passou para não terem resolvido a questão 3?
> Diana: Não estávamos a conseguir, por isso não respondemos nada.
> Investigadora: Mas tentaram?
> Andreia e Diana: Sim!
> Andreia: Primeiro tentamos fazer como nas outras [refere-se à questões *1* e *2*] mas não dava.

Investigadora: E o que tentaram fazer?
Andreia: Íamos construir o cubo de 10 mas não dava porque não tínhamos cubos que chegassem.
Diana: E depois fizemos desenhos numa folha de rascunho mas era difícil stôra.
Investigadora: Porquê?
Diana: Estava a sair tudo mal. E também não conseguíamos fazer os cubos todos, por isso…

O excerto da entrevista mostra que a Andreia e a Diana concluíram que, devido às limitações físicas do material, a estratégia contagem não se adequava à descoberta de termos mais distantes, como era o caso do cubo de aresta 10. Tentaram libertar-se da utilização do material, fazendo uma representação visual da situação mas desistiram desta abordagem por acharem que era um procedimento demasiado complexo.

	Estratégias de generalização		
Questões	C	NC	
1	X		Generalização Próxima
2	X		
3		X	Generalização Distante

Figura 105 - Síntese das estratégias usadas pela Andreia e pela Diana na Tarefa 7

Na resolução desta tarefa, a Andreia e a Diana privilegiaram a contagem como estratégia de generalização, tendo para isso recorrido aos modelos construídos com os cubos de encaixe (Figura 105). Esta opção mostrou-se adequada na exploração das questões de generalização próxima, contribuindo para que identificassem correctamente o número de cubos com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate existentes num cubo de aresta 3 e num cubo de aresta 4. No entanto, como não foram capazes de se abstrair do suporte concreto, não conseguiram explorar o que aconteceria num cubo de aresta 10, mostrando deste modo dificuldades em estabelecer a generalização distante. Esta situação pode também estar associada ao facto de terem contado os cubos um a um, o que não contribuiu para a identificação de uma forma directa de cálculo dos cubos unitários de cada tipo.

12.2.8 Síntese da exploração das tarefas

Após a análise aprofundada do trabalho desenvolvido pela Andreia e pela Diana, em cada uma das tarefas propostas, apresenta-se uma síntese centrada em aspectos particulares como o tipo de estratégias de generalização utilizadas, dificuldades sentidas e o papel da visualização no seu raciocínio.

12.2.8.1. Estratégias de generalização

Ao longo da fase de exploração das tarefas, a Andreia e a Diana aplicaram todas as estratégias de generalização, consideradas na categorização adoptada neste estudo, excepto a estratégia termo unidade. Das estratégias utilizadas, a contagem surgiu apenas em situações de generalização próxima e a tentativa e erro em situações de generalização distante, as restantes foram utilizadas em ambos os casos. Identificou-se ainda que, na maioria das tarefas, as alunas adoptaram abordagens diferenciadas dependendo do tipo de generalização, isto só não se verificou na tarefa *Dobragens* já que utilizaram sempre a estratégia recursiva.

Na resolução de questões de generalização próxima privilegiaram a contagem, embora em três das tarefas propostas tenham optado por utilizar as estratégias recursiva (D_1) e explícita. Na tarefa *Sequência de números* continuaram a sequência apresentada, com base num raciocínio recursivo, identificando assim a variação constante entre termos consecutivos, posicionados por linha. Na tarefa *Dobragens* usaram o mesmo tipo de estratégia, trabalhando exclusivamente num contexto numérico, após terem descoberto a variação ocorrida no número de partes em que a folha ficaria dividida depois de mais uma dobragem. Por último, na tarefa *Sequência de losangos*, conseguiram descobrir uma relação directa entre as variáveis lado do losango e número de peças que o constituem, através da observação das representações visuais dos três primeiros termos da sequência, utilizando assim a estratégia explícita.

No que respeita à generalização distante, as alunas apresentaram uma maior diversidade de estratégias no seu trabalho. Neste tipo de questões, optaram por utilizar estratégias como a diferença, a explícita e a tentativa e erro, tendo preterido a contagem. No âmbito da generalização distante foram propostas, em todas as tarefas, questões que implicavam a descoberta do termo que ocupava uma dada posição na sequência, no entanto também foram contempladas questões, em algumas tarefas, que promoviam a reversibilidade do pensamento, sendo pedida a ordem associada a um determinado termo da sequência. Analisando o trabalho desenvolvido pela Andreia e pela Diana, nestes dois tipos de questões, conclui-se que, na maioria das tarefas, recorreram a abordagens de natureza diferente. No primeiro caso privilegiaram claramente a estratégia explícita, tendo utilizado o raciocínio recursivo em apenas duas tarefas, *Sequência de números* e *Dobragens*. Nas situações em que esteve implicada a reversibilidade do pensamento variaram entre a estratégia diferença (D_1, D_2 e D_3) e a tentativa e erro. A ausência da estratégia explícita, neste caso, mostra que nunca utilizaram o raciocínio inverso, tendo por base a regra descoberta previamente.

É ainda pertinente salientar alguns casos pontuais nos quais as alunas utilizaram estratégias que não seriam expectáveis. Ao nível da generalização distante, há evidência da aplicação da estratégia recursiva nas tarefas *Sequência de números* e *Dobragens*. No que refere à generalização próxima destaca-se o recurso à estratégia explícita na tarefa *Sequência de losangos*, evidenciando a descoberta imediata de uma relação entre as variáveis dependente e independente.

12.2.8.2. Dificuldades emergentes do trabalho das alunas

Ao longo da experiência de ensino, a Andreia e a Diana evidenciaram dificuldades na resolução de algumas tarefas. Os erros cometidos e as dificuldades sentidas estão associados à resolução de questões de generalização distante, maioritariamente aquelas que envolvem a reversibilidade do pensamento.

Na tarefa *Os lembretes da Joana*, aplicaram indevidamente a estratégia D_2 para determinar o número de lembretes que poderiam ser pendurados com 600 *pioneses*, tanto nos lembretes rectangulares como nos triangulares. A utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos, sem proceder a um ajuste do resultado, não se adequa a padrões de tipo linear, como é o caso deste. Já na tarefa *A Pizzaria Sole Mio*, que também tem subjacente um padrão de tipo linear, fizeram um ajuste do resultado, após terem utilizado múltiplos da diferença entre termos consecutivos (D_3), para descobrir quantas pizzas seriam colocadas na mesa se lá estivessem sentadas 58 pessoas. No entanto, este ajuste não foi efectuado com base no contexto do problema, tendo-as conduzido a uma resposta incorrecta. O facto de, em determinado momento, terem trabalhado maioritariamente num contexto numérico, negligenciado o significado dos números, poderá ter contribuído para que as alunas cometessem estes erros.

Houve ainda algumas tarefas nas quais as alunas não conseguiram estruturar uma resposta para determinar termos distantes, em particular nas tarefas *Sequência de números* e *Cubos de chocolate*. No primeiro caso, não foram capazes de identificar uma estratégia que lhes permitisse localizar o número 542 e, no segundo caso, também não conseguiram descobrir uma abordagem que as conduzisse ao número de cubos com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate, existentes num cubo de aresta 10. Em qualquer uma destas situações, a Andreia e a Diana mostraram-se incapazes de identificar uma regra representativa do padrão subjacente às tarefas, o que pode estar associado à fixação pelas estratégias que vinham a utilizar na resolução das questões prévias, respectivamente a recursiva e a contagem. Este tipo de estratégias, embora adequadas à generalização próxima, raramente tendem a contribuir para a descoberta da estrutura do padrão.

Estas alunas revelaram também algumas dificuldades na descrição de regras associadas a determinados padrões. Por exemplo nas tarefas *Sequência de números* e *Dobragens*, optaram quase sempre por descrever as regras recorrendo a esquemas que apenas salientavam particularidades do padrão em causa, em detrimento da linguagem corrente. Nestes casos as regras definidas pela Andreia e pela Diana traduzem relações de tipo recursivo e não funcional, como se pretendia.

De entre as sete tarefas exploradas, aquelas em que revelaram maior insucesso foram *Os lembretes da Joana* e *Cubos de chocolate*. A primeira tem subjacente um padrão de tipo linear e as alunas recorreram a estratégias de resolução desadequadas, com base na utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos (D_2). No segundo caso, a tarefa envolvia simultaneamente padrões de tipo linear e não linear, e as alunas não conseguiram identificar uma estratégia de generalização para determinar valores distantes na sequência apresentada.

12.2.8.3. Papel da visualização no desempenho das alunas

Ao nível da generalização próxima, a Andreia e a Diana mostraram preferência por uma estratégia de natureza visual, a contagem. Na maioria das tarefas propostas, optaram por recorrer a representações visuais dos termos pretendidos, procedendo posteriormente à contagem dos seus elementos. Esta estratégia foi sempre aplicada de forma eficaz pelas alunas.

No que refere à generalização distante, embora tenham utilizado uma maior diversidade de estratégias, aquela que predominou foi a explícita, também ela de natureza visual, uma vez que as regras formuladas pelas alunas tiveram origem na interpretação do contexto do problema. Nestes casos, verificou-se que a Andreia e a Diana foram sempre bem sucedidas nas suas respostas. No entanto, a estratégia explícita não foi a única estratégia visual que aplicaram no seu trabalho, há também evidências do recurso à estratégia D_3. Esta abordagem foi utilizada na tarefa *A Pizzaria Sole Mio*, no cálculo do número de pizzas que estariam dispostas numa mesa com 58 pessoas. A estratégia em causa implica que seja efectuado um ajuste, após a consideração de múltiplos da diferença entre termos consecutivos, ajuste que foi concretizado pelas alunas mas que não se enquadrou no contexto em que trabalhavam. Esta situação poderá estar relacionada com o facto de as alunas terem negligenciado esse contexto no momento do ajuste, operando apenas com números sem significado atribuído.

Concluíram que a contagem nem sempre constitui uma estratégia de generalização eficaz, nomeadamente quando o objectivo passa pela descoberta de termos distantes o que torna esta abordagem demasiado exaustiva. Analisando a forma como as alunas utilizaram esta estratégia, verifica-se que efectuaram em todos os casos contagens unitárias, ou seja, limitaram-se a contar um a um os elementos presentes nas representações usadas. Este processo pode ter comprometido a formulação de regras, baseadas na disposição espacial dos elementos, na tarefa *Cubos de chocolate*.

Apesar de não terem sido identificadas dificuldades dignas de apontamento com a maior parte dos tópicos matemáticos envolvidos nas tarefas, na tarefa *Cubos de chocolate* foi notório que as capacidades das alunas ao nível da visualização espacial podem ter estado na base do seu insucesso.

CAPÍTULO 13

O CASO GONÇALO E TÂNIA

Neste capítulo descreve-se de forma aprofundada a participação de dois alunos que acederam integrar o estudo, o Gonçalo e a Tânia. Começa-se por dar a conhecer algumas características pessoais e académicas, referindo aspectos particulares das suas vivências e do seu percurso escolar. Posteriormente, é feita a análise do trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo do estudo, em particular, na exploração das tarefas propostas durante a experiência de ensino.

13.1. Caracterização dos alunos

No início do 6.º ano de escolaridade o Gonçalo tinha 11 anos. O aluno vive com os pais e dois irmãos, um mais velho e outro mais novo do que ele. Nos seus tempos livres, para além de frequentar, na Escola, o Laboratório de Matemática e o Clube de Línguas, também pratica futebol.

O Gonçalo não teve qualquer retenção até ao momento do estudo, tendo concluído o 5.º ano de escolaridade com nível 4 em quase todas as disciplinas. Quando questionado acerca das disciplinas que mais gostava, não hesitou em responder que era sem dúvida a Matemática. Sublinhou gostar de tudo nesta disciplina, referindo que por vezes tinha algumas dificuldades na geometria, principalmente "nas áreas". No ano lectivo anterior foi um aluno bastante regular, no que refere a esta disciplina, tendo concluído todos os períodos com nível 4.

Este aluno é algo introvertido, intervém apenas quando acha absolutamente necessário, principalmente quando se trata de uma discussão em grande grupo, preferindo expor as suas dúvidas no lugar. É um aluno atento e responsável e, apesar da sua postura discreta, está à vontade com os colegas e com o Professor.

A Tânia iniciou o 6.º ano de escolaridade com 10 anos de idade. Vive com os pais e com uma irmã mais velha. Nos seus tempos livres, para além de praticar ginástica, também frequenta, na Escola, o Laboratório de Matemática e o Clube de Línguas.

Tal como o Gonçalo, a Tânia nunca reprovou. Concluiu o 5.º ano de escolaridade com nível 4 na maioria das disciplinas. Destacou como disciplinas preferidas a Matemática e a Educação Visual e Tecnológica. A primeira porque gosta da forma como o Professor ensina, tornando tudo muito mais fácil, e a outra porque lhe permite “aprender técnicas novas de desenho”. Apesar de ter terminado o ano lectivo anterior com nível 4 na disciplina de Matemática, começou por ter nível 3, no final do primeiro período. Aquilo que menos gosta nas aulas de Matemática é a geometria, revelando sentir algumas dificuldades nesta área, e a sua preferência incide “nos cálculos”, dizendo adorar as aulas em que o professor propõe “jogos com contas”.

A Tânia é um pouco o oposto do Gonçalo. É bastante extrovertida, apresentando-se sempre com um sorriso nos lábios. É muito interventiva e sente-se perfeitamente à vontade na turma, participando frequentemente nas discussões em grande e em pequeno grupo.

Apesar de terem personalidades diferentes, o Gonçalo e a Tânia funcionaram bem enquanto par. Foi notório que a Tânia assumiu uma atitude dominante no grupo, sendo mais decidida e determinada nas suas decisões do que o Gonçalo, no entanto nunca ultrapassou o colega. Ao longo das sessões de exploração das tarefas, foi quase sempre a Tânia que ficou encarregue dos registos do grupo mas apenas o fazia após ter discutido com o Gonçalo a abordagem a utilizar.

13.2. A exploração das tarefas

Nesta secção descreve-se o trabalho desenvolvido pelo Gonçalo e pela Tânia ao longo da experiência de ensino. É feita uma análise da forma como exploraram cada uma das tarefas propostas, centrada no tipo de estratégias de generalização utilizadas, nas dificuldades sentidas e no papel da visualização no seu raciocínio. No final da secção apresenta-se um balanço do seu desempenho, através da síntese e comparação dos dados resultantes do seu trabalho.

13.2.1. Tarefa 1 - Os lembretes da Joana

Após a leitura da tarefa, em grande grupo, o Gonçalo e a Tânia iniciaram a sua resolução. Começaram por reler a primeira questão e discutiram qual seria a melhor estratégia para a resolver. Neste caso, optaram pela contagem, fundamentando a sua escolha da seguinte forma: “como eram só 6 lembretes, desenhamos, colocamos os *pioneses* e contamos quantos tinha”.

Para determinar o número de *pioneses* gastos em 35 lembretes (questão *2*), utilizaram uma estratégia explícita, baseada numa generalização de natureza construtiva, como se pode verificar na resolução apresentada na folha de resposta (Figura 106).

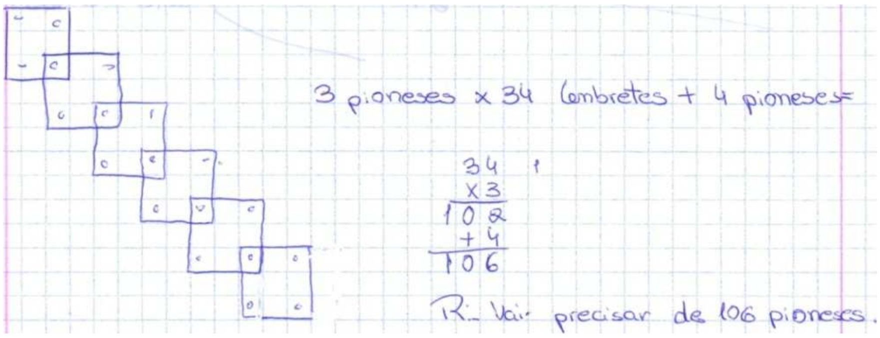


Figura 106 - Resolução da questão *2* da Tarefa 1 apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia

Antes de deduzirem a regra que lhes permitiu descobrir o número de *pioneses*, desenharam novamente o 6.º termo da sequência, ou seja, os 6 lembretes e os respectivos *pioneses*. Durante a entrevista, os alunos argumentaram que, numa fase inicial, pensaram em utilizar a contagem mas, devido ao número elevado de lembretes, recorreram antes a uma estratégia mais directa que surgiu da análise da representação que efectuaram.

Investigadora: Vocês começaram por desenhar novamente os seis lembretes. Porquê?
Tânia: Íamos fazer da mesma maneira [refere-se à questão *1*], mas não dava.
Investigadora: Não dava?
Tânia: Não!
Gonçalo: Eram muitos cartões.
Investigadora: E então como resolveram o vosso problema?
Tânia: Fizemos 34×3 e depois juntamos mais 4.
Investigadora: E de onde surgiu esse cálculo? Como chegaram a essa conclusão?
Tânia: Porque vê-se que todos levam 3…
Tânia e Gonçalo: Menos o último!
Gonçalo: O último leva 4.

A expressão numérica apresentada pelos alunos (Figura 106) reflecte, para além da apropriação da estrutura deste padrão, a relevância do contexto na sua construção já que a cada número foi atribuído um significado.

A terceira questão desta tarefa, tal como a anterior, envolve a generalização distante mas, neste caso, pretendia-se que os alunos identificassem o número de lembretes que poderiam pendurar tendo disponíveis 600 *pioneses*. Para dar resposta a este problema, recorreram novamente a uma estratégia explícita, tendo por base a regra descoberta na resolução da questão anterior. Começaram por subtrair os *pioneses* relativos ao último lembrete, posteriormente determinaram quantos agrupamentos de 3 *pioneses* conseguiam fazer com os restantes (Figura 107).

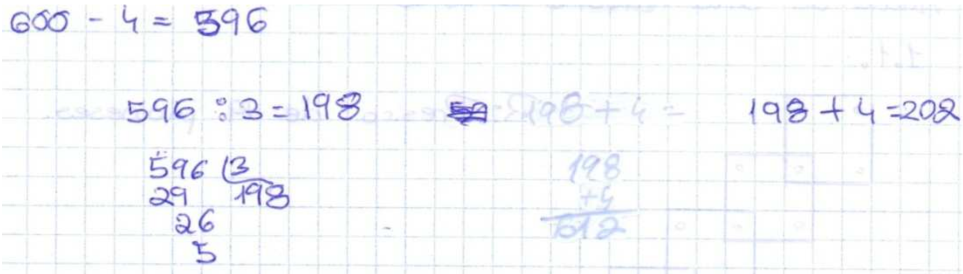


Figura 107 - Resolução da questão *3* da Tarefa 1 apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia

Apesar de mostrarem reversibilidade do pensamento, ao apresentarem a resposta a esta questão, juntaram valores associados a duas variáveis diferentes, lembretes e *pioneses*, fazendo 198+4. Ao contrário do que aconteceu na questão anterior, os alunos não associaram os números ao contexto, desligando-se do significado de cada um.

Na resolução das questões associadas aos lembretes triangulares, utilizaram o mesmo tipo de estratégias que aplicaram nas questões prévias com a mesma formulação. Inicialmente, recorreram à contagem para determinar o número de *pioneses* necessários para pendurar 6 lembretes triangulares (questão *4.1*), tendo feito uma representação visual da situação. Na questão *4.2* descobriram uma estratégia explícita, com base na distribuição dos *pioneses* pelos lembretes, concluindo que teriam 2×34+3=71 *pioneses*. E, por fim, na última questão também evidenciaram reversibilidade do pensamento, apoiando-se na regra descoberta na alínea anterior, no entanto voltaram a cometer o mesmo erro que cometeram na resolução da questão *3*, juntando lembretes com *pioneses* no final.

	Estratégias de generalização		
Questões	C	E	
1	X		Generalização Próxima
4.1	X		
2		X	Generalização Distante
3		X	
4.2		X	
4.3		X	

Figura 108 - Síntese das estratégias usadas pelo Gonçalo e pela Tânia na Tarefa 1

Na exploração desta tarefa, o Gonçalo e a Tânia usaram apenas dois tipos de estratégias, ambas de natureza visual. Nas questões de generalização próxima, recorreram à contagem, abordagem que consideraram desadequada na identificação de termos mais distantes. Já na generalização distante optaram pela estratégia explícita, deduzindo as regras a partir do contexto do problema. Apesar de terem mostrado reversibilidade do pensamento, nas questões *3* e *4.3*, utilizando estratégias explícitas baseadas nas regras descobertas previamente, revelaram algumas dificuldades ao juntar valores associados a variáveis diferentes. As dificuldades sentidas pelos alunos resultaram de, nesta fase, terem trabalhado num plano estritamente numérico.

13.2.2. Tarefa 2 - *Piscinas*

Antes de iniciar a resolução da tarefa, o Gonçalo e a Tânia estiveram atentos à discussão inicial, centrada nas dúvidas colocadas pela turma, só depois começaram o seu trabalho. Como em quase todas as tarefas, a Tânia ficou encarregue dos registos na folha de resposta, no entanto, o Gonçalo tinha também uma folha na qual escrevia os rascunhos das primeiras ideias do grupo.

Para resolver a primeira questão começaram por desenhar uma piscina de dimensões 10×4, efectuando posteriormente a contagem do número de azulejos azuis e brancos (Figura 109). Na sua representação tiveram o cuidado de distinguir os azulejos, sombreando os centrais, e ainda indicar o número de azulejos dispostos no comprimento e na largura da piscina “para não se enganarem”.

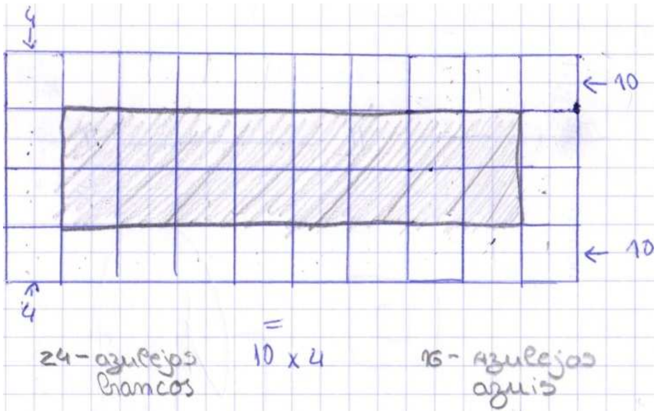


Figura 109 - Resolução da questão *1* da Tarefa 2 apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia

Na resolução das alíneas relativas à segunda questão da tarefa, foram menos organizados nas respostas apresentadas e não clarificaram o seu raciocínio. Para determinar o número de azulejos azuis usaram a expressão numérica 88×28 e no caso dos azulejos brancos recorreram a cálculos parcelares, como se pode observar na Figura 110, equivalentes à expressão numérica 90+90+28+28.

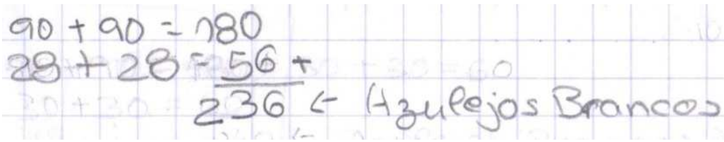


Figura 110 - Resolução da questão *2.2* da Tarefa 2 apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia

Em qualquer um dos casos, percebe-se que os alunos aplicaram uma estratégia explícita mas, como não fundamentaram convenientemente a origem das expressões utilizadas, considerou-se pertinente que explicitassem o seu raciocínio durante a entrevista.

Investigadora: Na resolução das questões *2.1* e *2.2* da tarefa, vocês apresentaram apenas cálculos e há algumas coisas que eu gostava de perceber melhor. Por exemplo, na *2.1* escreveram que o número de azulejos azuis é 88×28=2464. Como pensaram?
Gonçalo: Porque é menos 2.
Investigadora: Menos 2 como? Expliquem melhor.
Tânia: Daqui dos lados tiramos 2 [aponta para a piscina que construíram] porque só se contam os de dentro.
Gonçalo: Fica 88 e 28. E é vezes [refere-se à multiplicação] porque é a área.
Investigadora: Agora gostava que explicassem melhor como resolveram a questão *2.2*.
Tânia: Fizemos 90+90 porque era a largura, dois lados. E depois 28+28 em vez de ser 30+30.
Investigadora: Porquê?
Gonçalo: Porque já tínhamos contado os dos cantos.

A última questão da tarefa foi aquela em que este par sentiu maiores dificuldades, à semelhança da maior parte da turma. Apesar de terem tentado resolver, não apresentaram qualquer resposta. Referiram ter acompanhado a discussão promovida na sessão em que a tarefa foi proposta, mas consideraram que “era um problema muito difícil”. Afirmaram ainda ter discutido entre si possíveis formas de resolução e registado “algumas coisas na folha de rascunho”, no entanto as conclusões a que chegaram não lhes pareceram válidas.

	Estratégias de generalização			
Questões	C	E	NC	
1	X			Generalização Próxima
2.1		X		Generalização Distante
2.2		X		
3			X	

Figura 111 - Síntese das estratégias usadas pelo Gonçalo e pela Tânia na Tarefa 2

A Figura 111 traduz, de forma resumida, o trabalho desenvolvido pelo Gonçalo e pela Tânia na tarefa *Piscinas*. Usaram estratégias distintas na abordagem à generalização próxima e distante mas todas de natureza visual. Tanto na generalização próxima, onde aplicaram a contagem, como na descoberta de termos distantes, onde privilegiaram a estratégia explícita, as representações visuais foram fundamentais no estabelecimento da generalização. Tal como na tarefa anterior, as maiores dificuldades sentidas por este par registaram-se numa questão que promovia a reversibilidade do pensamento, sendo incapazes de encontrar uma estratégia adequada para lhe dar resposta.

13.2.3. Tarefa 3 – Sequência de números

A Tânia e o Gonçalo iniciaram a resolução da tarefa logo após a leitura da mesma. Como era habitual, a Tânia ficou encarregue dos registos na folha de resposta e o Gonçalo responsável por delinear as primeiras ideias do grupo numa folha de rascunho.

Não demonstraram dificuldades em continuar a sequência por mais duas linhas. Copiaram para a folha de resposta a parte da sequência apresentada no enunciado e acrescentaram, usando uma caneta de cor diferente, a 6ª e a 7ª linhas, utilizando um raciocínio recursivo (D_1) com base na identificação da diferença entre termos consecutivos, dispostos por linha.

Este par não foi excepção ao revelar dificuldades na explicitação da regra que lhes permitiu dar continuidade à sequência. Perante a possibilidade de utilizarem cálculos, palavras ou desenhos, optaram por apresentar um esquema, que integrou algumas destas representações (Figura 112).

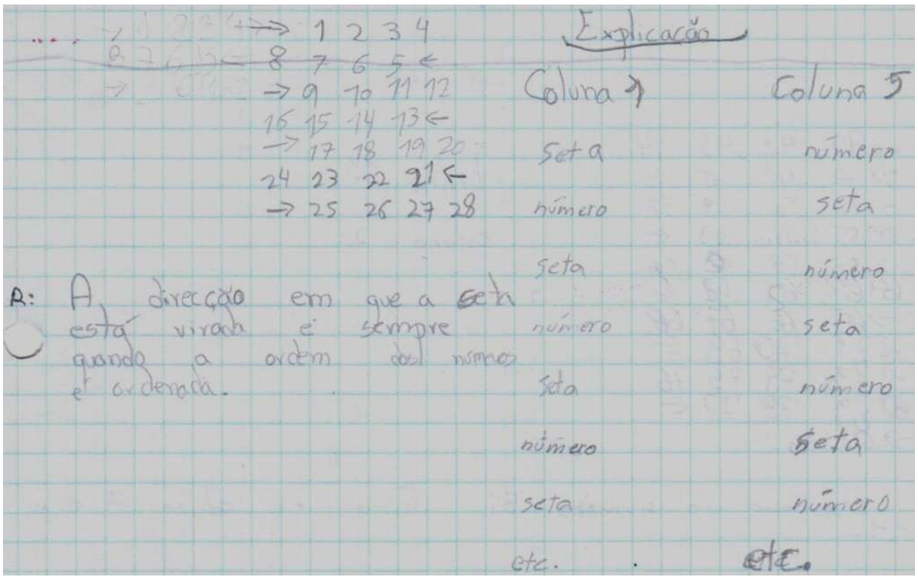


Figura 112 - Resolução da questão *2* da Tarefa 3 apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia

Apesar das dificuldades exibidas ao nível da argumentação, destacaram algumas características relevantes da sequência. É evidente o impacto do arranjo espacial dos elementos da sequência no trabalho dos alunos, que recorreram a setas para indicar o sentido de crescimento dos números e para evidenciar espaços em branco. Salientaram ainda a relevância da primeira e da última colunas onde, alternadamente, iam surgindo números e espaços em branco.

> Gonçalo: Na 1ª linha fazíamos os números ordenados. Na seguinte já púnhamos ao contrário.
> Investigadora: E notaram mais alguma coisa?
> Tânia: Sim! Ao começar cada linha deixávamos sempre um espaço em branco.
> Investigadora: E porque é que destacaram na vossa resolução a 1ª e a 5ª colunas?
> Gonçalo: Porque era onde mudava. Tínhamos um espaço e íamos até ao fim e na seguinte púnhamos um espaço em branco e íamos até ao fim.

Depois do esclarecimento em grande grupo acerca do que significava procurar “relações numéricas na sequência”, discutiram, durante algum tempo, sobre o tipo de padrões que poderiam encontrar. No entanto, não se mostraram muito persistentes, tendo apenas registado duas descobertas: “na primeira linha os números estão ordenados e na segunda linha estão ao contrário”; “na primeira, na terceira e na quinta colunas os números são pares e na segunda e na quarta são ímpares”.

Para localizar a posição ocupada pelos números 40 (questão *4*) e 81 (questão *5*), continuaram a sequência até encontrar os valores pretendidos, aplicando deste modo a estratégia recursiva (D_1). Apesar de terem sido bem sucedidos na identificação da linha e da coluna associadas a estes números, reconheceram que se tratava de um método moroso, à medida que a ordem do termo pedido se tornava sucessivamente maior.

> Investigadora: Para localizarem os números 40 e 81 vocês usaram o mesmo processo não foi?
> Tânia: Fomos escrevendo os números até 40 e depois até 81.
> Investigadora: E resultou porque conseguiram identificar a linha e a coluna em que se encontravam.
> Gonçalo e Tânia: Sim!
> Investigadora: Vi que não encontraram o 542.
> Tânia: Não conseguimos.
> Investigadora: E se este método resultou porque é que não o usaram?
> Gonçalo: Porque o número era muito grande.
> Tânia: Nem tínhamos folha para isso [sorri]. Já com o 81 gastamos metade da folha!

Como não foram capazes de se libertar do raciocínio recursivo, que esteve presente ao longo de todo o seu trabalho, a localização do número 542 ficou comprometida, já que não conseguiram descobrir uma regra que relacionasse, de forma imediata, a linha e a coluna associadas ao número com a sua ordem.

	Estratégias de generalização		
Questões	D_1	NC	
1	X		Generalização Próxima
4	X		Generalização Distante
5.1	X		
5.2		X	

Figura 113 - Síntese das estratégias usadas pelo Gonçalo e pela Tânia na Tarefa 3

Na Figura 113, pode observar-se que o Gonçalo e a Tânia deram preferência à estratégia recursiva, no trabalho que desenvolveram na resolução desta tarefa, tanto em questões de generalização próxima como distante. Ao optarem por esta estratégia, não sentiram dificuldades nos casos em que a ordem de grandeza dos números pretendidos era reduzida. No entanto tornou-se numa abordagem desadequada na identificação do número 542.

13.2.4. Tarefa 4 – A Pizzaria Sole Mio

O Gonçalo e a Tânia iniciaram a resolução desta tarefa logo após a leitura do enunciado. Não colocaram qualquer dúvida, na fase inicial de discussão, e não evidenciaram dificuldades na resolução das três primeiras questões.

A tarefa começava com um questão de generalização próxima que os alunos resolveram com recurso à contagem. Desenharam uma mesa com 10 pizzas e representaram as pessoas numa disposição semelhante à apresentada nas figuras do enunciado.

Na segunda questão da tarefa, pedia-se que descobrissem o número de pessoas que estariam sentadas numa mesa com 31 pizzas. O primeiro instinto destes alunos foi utilizar a contagem, mas desistiram, tendo feito apenas a representação para 15 pizzas.

> Investigadora: Vocês começaram por fazer um desenho. Mas riscaram. Porquê?
> Tânia: Porque estavam a ser muitas.
> Gonçalo: Nem ia caber na folha.

Depois de compreenderem que esta não seria uma abordagem adequada à generalização distante, aplicaram uma estratégia explícita, formulando uma regra a partir do contexto do problema. Na folha de resposta apresentaram apenas o cálculo "31+31+2=64 pessoas", no entanto, na entrevista clarificaram o seu raciocínio.

> Investigadora: Depois de terem riscado o desenho que estavam a fazer, decidiram fazer este cálculo [refere-se a 31+31+2=64]. Podem explicar-me o que significa?
> Tânia: Estão 31 pessoas de um lado e do outro também e nas pontas estão duas.
> Investigadora: E como é que chegaram a esta conclusão?
> Tânia: Porque era sempre assim!
> Gonçalo: Nas outras mesas também era!

A observação da disposição das pessoas em relação às pizzas, contribuiu para a identificação de uma regra de natureza construtiva que lhes permitiu o cálculo imediato do número de pessoas pretendido. Como se pode observar na Figura 114, os alunos utilizaram esta regra também na resolução da questão 3, revelando, deste modo, reversibilidade do pensamento.

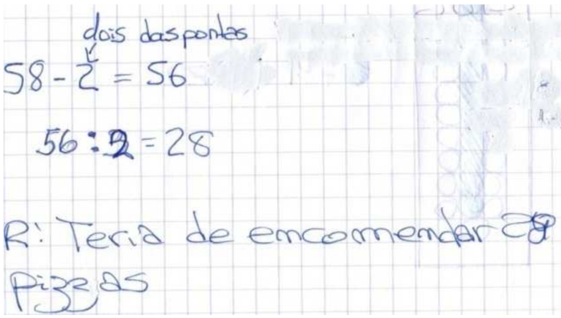


Figura 114 - Resolução da questão *3* da Tarefa 4 apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia

A exploração da questão *4.1* tomou um pouco mais de tempo a este par. Após alguns minutos de discussão entre eles, solicitaram a presença da investigadora. O objectivo dos alunos passava essencialmente por ver validado o seu raciocínio.

> Gonçalo: Stôra, para ver onde come mais pizza temos que dividir não é?
> Investigadora: Não sei! Têm de pensar.
> Tânia: As mesas são estas aqui de cima [refere-se às figuras do enunciado]?
> Investigadora: Sim! São mesas de 8 e mesas de 10 pessoas.
> Tânia: Então assim já sabemos quantas pizzas há.
> Investigadora: Agora só têm que descobrir em qual das mesas é que o João comeria mais pizza.

Os alunos reconheceram tratar-se de um problema de divisão e usaram a representação fraccionária para determinar a quantidade de pizza que o João comeria em cada situação. Depois de reduzirem as fracções ao mesmo denominador, compararam os números obtidos e concluíram que “come maior quantidade de pizza na mesa de 10 pessoas”.

Na última questão, limitaram-se a investigar o que aconteceria se o João se sentasse numa mesa com 28 ou com 29 pizzas. O primeiro caso foi seleccionado porque “foi o resultado da pergunta *3*” e o outro valor foi escolhido por ser “o número a seguir”. O número de pessoas associadas a uma mesa com 29 pizzas foi determinado utilizando a estratégia explícita que já tinham descoberto na questão *2* desta tarefa. Após a análise destes casos, comparando as representações fraccionárias da quantidade de pizza que cabia ao João em cada uma das mesas, inferiram que “se ele convidar mais pessoas vai comer mais pizza”.

	Estratégias de generalização		
Questões	C	E	
1	X		Generalização Próxima
2		X	Generalização Distante
3		X	
4.2		X	

Figura 115 - Síntese das estratégias usadas pelo Gonçalo e pela Tânia na Tarefa 4

Analisando o trabalho desenvolvido pelo Gonçalo e pela Tânia na resolução desta tarefa, verifica-se que foi aquela em que demonstraram menos dificuldades. A Figura 115 evidencia que utilizaram estratégias adequadas a cada uma das questões propostas, recorrendo à contagem na generalização próxima e à estratégia explícita na generalização distante.

13.2.5. Tarefa 5 – *Dobragens*

Contrariamente ao que sucedeu em tarefas anteriores, nesta os papéis dos alunos inverteram-se. A Tânia ofereceu-se de imediato para usar a folha de jornal, passando ao Gonçalo a responsabilidade de efectuar os registos do grupo na folha de resposta.

Após a leitura do enunciado da tarefa, os alunos iniciaram a sua resolução, explorando de imediato as dobragens na folha que lhes foi atribuída. A discussão acerca do número de secções que iriam encontrar tomou-lhes algum tempo. Foi também possível observar, nesta fase, o Gonçalo a manipular a folha para explicar a sua perspectiva à colega. Chegaram à conclusão que "a folha de jornal ficaria dividida em 8 partes iguais", confirmando a sua conjectura ao abrir a folha.

> Investigadora: Como chegaram a esta conclusão? Abriram a folha?
> Tânia: Não! Foi antes stôra!
> Gonçalo: Nós pensamos que se uma dobra dava 2 partes, já duas dobras dava 4 partes.
> Investigadora: Porquê?
> Tânia: Ao dobrar a folha corta-se o que está lá a meio.
> Gonçalo: [Continua] E ao dobrar outra vez já fica 8 porque parte outra vez a meio.

Este excerto da entrevista mostra que os alunos criaram uma imagem mental do efeito da dobragem na folha. Na resolução da segunda questão, admitiram não ter utilizado o material, já que identificaram uma regra que lhes permitiu descobrir o que aconteceria ao fim de sete dobragens (Figura 116).

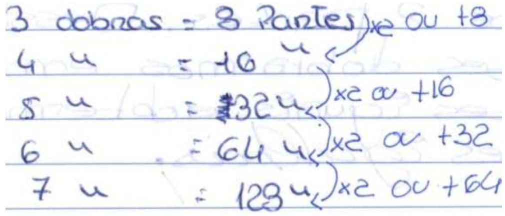


Figura 116 - Resolução da questão *2* da Tarefa 5 apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia

O Gonçalo e a Tânia aplicaram uma estratégia recursiva (D_1), já que encontraram uma forma de relacionar valores consecutivos da variável dependente. Como se observa na Figura 116, os alunos representaram essa regra de duas formas equivalentes.

> Tânia: Fomos fazendo sempre o dobro. 4 é o dobro de 2 e 8 é o dobro de 4 e continuamos.
> Investigadora: Mas estou a ver que vocês usaram ao lado outra regra. O que significa?
> Gonçalo: É a mesma coisa.
> Tânia: Por exemplo, 3 dobras dava 8 partes, ao dobrar outra vez dava mais 8 partes.
> Gonçalo: Era juntar o que se tinha.

Apesar de terem utilizado uma estratégia que os conduziu à resposta pretendida, a argumentação apresentada por este par incide essencialmente na indicação de casos particulares, o que pode constituir um entrave à descoberta de valores mais distantes. As maiores dificuldades que o Gonçalo e a Tânia revelaram surgiram precisamente em questões deste tipo. Na questão *3*, voltaram a privilegiar o raciocínio recursivo, formulando a regra “o resultado da primeira dobra vezes 2”, que não se enquadra no objectivo previsto, já que não relacionam as variáveis número de dobragens e número de partes. Por outro lado, não tendo conseguido encontrar uma regra deste tipo, juntamente com o facto de terem de utilizar o raciocínio inverso, apresentaram um raciocínio completamente desadequado na resolução da questão *4*: “1024 partes iguais÷2=512 dobragens”. Na entrevista, tiveram a oportunidade de verificar que o raciocínio utilizado não era válido e porquê.

> Investigadora: Para resolverem a quarta questão fizeram 1024÷2 e concluíram que foram feitas 512 dobragens. Como chegaram a esta conclusão?
> Tânia: Dividimos por 2 porque dobramos a meio.
> Investigadora: Vamos então pensar ao contrário. Se dobrássemos a folha 512 vezes teríamos a folha dividida em 1024 partes iguais?
> [Ficam em silêncio]
> Investigadora: E se continuassem a tabela que fizeram na segunda questão?
> Gonçalo: Até 512?!?
> Investigadora: Vamos continuar e ver o que acontece.

[A Tânia prolonga a tabela]
Tânia: Ah! São 10 dobras.
Investigadora: Ao dividirem por 2 estão a fazer o inverso de duplicar. Neste contexto o que acham que está a acontecer.
[Faz-se silêncio]
Gonçalo: Estamos a andar para trás…nas partes.

A última questão da tarefa foi resolvida sem qualquer dificuldade, tendo determinado correctamente a área, em cada um dos casos, optando por utilizar a representação fraccionária.

	Estratégias de generalização			
Questões	C	D_1	NC	
1	X			Generalização Próxima
2		X		Generalização Distante
3		X		
4			X	

Figura 117 - Síntese das estratégias usadas pelo Gonçalo e pela Tânia na Tarefa 5

A Tabela 117 sintetiza o trabalho desenvolvido pelo Gonçalo e pela Tânia na resolução da tarefa *Dobragens*. Observa-se que optaram preferencialmente pela estratégia recursiva, quer em situações de generalização próxima como distante. Neste último caso, nem sempre foram bem sucedidos, nomeadamente na identificação de uma regra que relacionasse as variáveis dependente e independente e na resolução de questões que promovem a reversibilidade do pensamento.

13.2.6. Tarefa 6 – Sequência de losangos

Após a leitura da tarefa, o Gonçalo e Tânia começaram por construir um losango de lado 4 (questão *1.1*). Nesta representação, os alunos utilizaram cores diferentes para salientar a existência de um losango de lado 3 e mais sete peças adicionais, apresentando a resolução que se observa na Figura 118.

Figura 118 - Resolução da questão *1* da Tarefa 6 apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia

O raciocínio apresentado pelos alunos suscitou algumas dúvidas no que respeita à estratégia por eles utilizada. Por um lado a construção do losango de lado 4 indicia a aplicação da contagem mas, no entanto, verifica-se que descobriram um losango de lado 3, dentro da figura construída, e sinalizaram as peças que lhe foram acrescentadas, dando a ideia da utilização de um raciocínio recursivo. Perante esta dúvida, durante a entrevista houve necessidade de pedir aos alunos que clarificassem a sua abordagem.

> Investigadora: Como concluíram que eram necessárias 16 peças?
> Gonçalo: Juntámos […] Juntámos 3 peças aqui e 3 peças aqui [aponta para a figura desenhada] para formar uma nova linha. Só que faltava mais uma para construir o vértice e metemos mais uma.
> Investigadora: Mas como é que chegaram às 16?
> Tânia: Contamos as peças.
> Investigadora: Como? Que processo utilizaram?
> Tânia : Uma a uma.

Apesar de terem identificado uma estratégia recursiva para dar continuidade à sequência de losangos não a utilizaram. Este excerto da entrevista revela que os alunos optaram por utilizar a contagem na descoberta do número de peças associadas a um losango de lado 4.

A questão *1.2* implica uma generalização distante, já que se pretende a descoberta do 50.º termo da sequência de losangos. Esta alteração no nível de generalização pode ter contribuído para que os alunos mudassem de estratégia. O Gonçalo e a Tânia abandonaram a contagem, optando por aplicar uma estratégia explícita, como se pode observar na Figura 119.

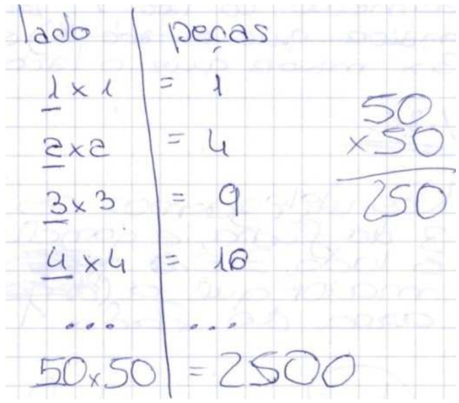


Figura 119 - Resolução da questão *1.2* da Tarefa 6 apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia

Os alunos construíram uma tabela de forma a organizar os dados relativos às dimensões dos losangos e ao número de peças de cada um. A leitura e interpretação horizontal desta tabela permitiu que, depois de estudarem os quatro primeiros termos da sequência, deduzissem uma regra que aplicaram ao losango de lado 50. A Tânia explicou que utilizaram esta regra porque fizeram "a experiência no lado 1, 2, 3 e 4 e resultou" e o Gonçalo salientou que, neste caso, este processo "é mais fácil" do que a contagem.

Tal como na tarefa anterior, estes alunos voltaram a evidenciar dificuldades na utilização do raciocínio inverso. Para determinar o perímetro de um losango constituído por 324 peças (questão *2*), compreenderam que tinham que descobrir o comprimento do lado desse losango, no entanto para o fazer efectuaram o cálculo 324÷2.

Investigadora: Nesta questão [questão *2*] pedia-se o perímetro de um losango com 324 peças. Expliquem-me o que fizeram.
Gonçalo: Precisávamos do comprimento e da altura.
Tânia: [Corrige o colega] Dos lados.
Investigadora: E como é que determinaram o comprimento do lado?
Gonçalo: Fizemos 324÷2.
Investigadora: Porquê?
Tânia: Porque ao contrário era lado vezes lado.
Investigadora: Como assim ao contrário.
Tânia: Antes […] quando queríamos as peças. E agora queríamos o lado.
Investigadora: Então concluíram que o comprimento do lado do losango era 162.
Tânia: Sim!
Investigadora: Pensem então ao contrário. Sabendo que o lado do losango é 162 quantas peças terá?
Gonçalo: Não é 162?
Investigadora: Vamos verificar.
Tânia: É 162×16 [Determina o resultado na calculadora] Dá 26244.
Gonçalo: [Sorri] Xii!

Como se pode perceber, o raciocínio dos alunos foi condicionado por dificuldades relacionadas com conceitos geométricos, em particular o conceito de área. Durante a entrevista tiveram a oportunidade de verificar a validade do raciocínio utilizado, concluindo que usaram uma abordagem desadequada à questão proposta.

A exploração da terceira questão só foi iniciada após a discussão promovida na turma. Para analisar a relação entre os perímetros (questão *3.1*) e entre as áreas de losangos (questão *3.2*) nas condições propostas no enunciado, limitaram-se a estudar um caso. As suas conjecturas, embora correctas, decorreram da comparação dos perímetros e das áreas dos losangos de lados 1 e 3. No entanto, destaca-se que, tanto num caso como no outro, as regras apresentadas são de tipo factual, limitando-se a fazer referência aos casos analisados: "o perímetro do de lado 3 é 3× maior do que o de lado 1"; "a área do de lado 3 é 9× maior do que o de lado 1".

	Estratégias de generalização			
Questões	C	E	NC	
1.1	X			Generalização Próxima
1.2		X		Generalização Distante
2			X	

Figura 120 - Síntese das estratégias usadas pelo Gonçalo e pela Tânia na Tarefa 6

Analisando a Figura 120, observa-se que os alunos optaram por estratégias diferentes na resolução de questões de generalização próxima e distante. No primeiro caso aplicaram a contagem e na procura de valores mais distantes utilizaram uma estratégia explícita. Em qualquer um dos casos privilegiaram estratégias de natureza visual. Evidenciaram dificuldades na resolução de questões que promovem a reversibilidade do pensamento,

13.2.7. Tarefa 7 – Cubos de chocolate

O Gonçalo e a Tânia mostraram grande envolvimento na resolução desta tarefa, tal como era habitual. No entanto, os cubos de encaixe contribuíram para aumentar o entusiasmo e a motivação com que encararam esta sessão. Como nunca tinham utilizado este material nas aulas de Matemática, reagiram com alguma curiosidade, dedicando algum tempo à exploração livre dos cubos.

Após a leitura da primeira questão, decidiram construir um cubo de aresta 3, utilizando o material fornecido. Ambos participaram desta construção colocando as peças de forma sucessiva. Para determinarem o número de cubos com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate usaram como estratégia a contagem, apresentando na folha de registo os valores relativos a cada caso.

> Investigadora: Queria que me explicassem como é que chegaram a estes valores.
> Gonçalo: Fomos contando.
> Investigadora: Foram contando como? Usando o quê?
> Tânia: Usamos o cubo que fizemos [refere-se ao cubo de aresta 3]. E depois fomos contando os cubinhos.
> Investigadora: E como é que fizeram essa contagem?
> Tânia: Nós partimos do cubo e depois fomos contando as peças.
> Gonçalo: Vimos na 1ª fila [refere-se à 1ª camada de cubos unitários] quantos tinha, depois vimos na 2ª e depois na 3ª. Para não nos enganarmos.
> Investigadora: Mas contaram os cubinhos um a um ou de outra forma?
> Tânia: Um a um.

O Gonçalo e a Tânia encontraram uma forma de controlar a contagem que efectuaram, observando quantos cubos unitários de cada tipo tinham em cada *camada* do cubo de aresta 3, no entanto estes elementos foram contados um a um.

Na segunda questão da tarefa, optaram por estudar apenas um caso, o do cubo de aresta 4, fundamentando que pretendiam ”seguir a ordem”. Perante esta situação, mantiveram a estratégia de generalização aplicada na resolução da questão anterior. Construíram o cubo que seleccionaram e contaram o número de cubos de 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate, controlando este processo através da observação de cada uma das quatro *camadas* do cubo construído. Desta vez, decidiram representar os dados numa tabela, de forma a registar gradualmente os resultados da sua contagem (Figura 121).

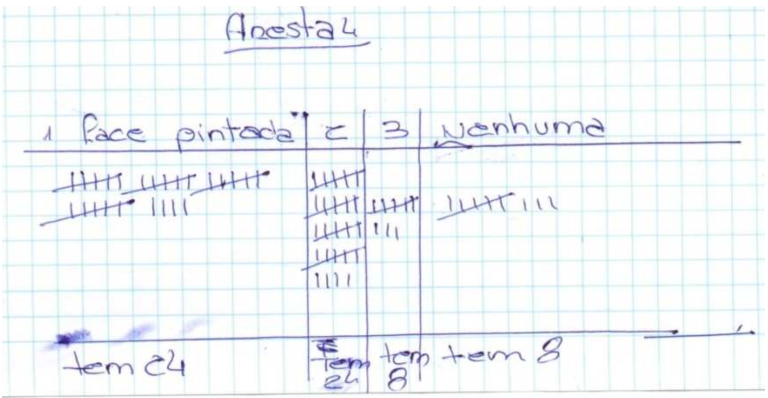


Figura 121 - Resolução da questão *2* da Tarefa 7 apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia

A tabela construída pelos alunos reflecte o recurso a uma contagem unitária de cada um dos elementos que constituíam o cubo, patente nos tracinhos utilizados na segunda linha.

No caso do cubo de aresta 10 (questão *3*) não foram capazes de identificar uma estratégia que se adequasse ao cálculo do número de cubos com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate. Perante a generalização distante, concluíram que não poderiam recorrer à contagem, nos mesmos moldes que anteriormente porque "não havia cubinhos que chegassem para construir o cubo de 10", no entanto não conseguiram encontrar uma estratégia alternativa.

	Estratégias de generalização		
Questões	C	NC	
1	X		Generalização Próxima
2	X		
3		X	Generalização Distante

Figura 122 - Síntese das estratégias usadas pelo Gonçalo e pela Tânia na Tarefa 7

Como se conclui da análise da Tabela 122, nesta tarefa o Gonçalo e a Tânia deram preferência à contagem como estratégia de generalização. Esta abordagem foi utilizada de forma adequada na resolução das questões de generalização próxima, nas quais tiveram por base os modelos construídos com os cubos de encaixe. No entanto, não foram bem sucedidos na generalização distante. Não foram capazes de encontrar uma estratégia alternativa à contagem para resolver o problema para termos mais distantes.

13.2.8 Síntese da exploração das tarefas

Após a análise detalhada do trabalho desenvolvido pelo Gonçalo e pela Tânia, ao longo da experiência de ensino, apresenta-se uma síntese centrada em aspectos como as estratégias de generalização privilegiadas, dificuldades sentidas e o papel da visualização no seu raciocínio.

13.2.8.1. Estratégias de generalização

Ao longo da experiência de ensino, o Gonçalo e a Tânia utilizaram apenas três das estratégias definidas na categorização adoptada neste estudo: contagem, recursiva (D_1) e explícita. Em geral, optaram por estratégias diferentes nas questões de generalização próxima e distante, à excepção da tarefa *Sequência de números* na qual aplicaram sempre um raciocínio de tipo recursivo.

Na generalização próxima privilegiaram quase sempre a contagem, destacando-se apenas uma tarefa na qual recorreram à estratégia recursiva. Na tarefa *Sequência de números*, continuaram a sequência apresentada com base num raciocínio recursivo, tendo identificado a variação entre termos consecutivos posicionados por linha.

No que refere à generalização distante utilizaram no seu trabalho as estratégias recursiva e explícita, no entanto revelaram uma preferência clara pelas estratégias de natureza explícita. Apenas nas tarefas *Sequência de números* e *Dobragens* optaram pelo raciocínio recursivo na identificação de termos distantes. Em qualquer um dos casos, os alunos prolongaram a sequência até descobrirem os termos pretendidos. Em algumas tarefas foram propostas questões de generalização distante que promoviam a reversibilidade do pensamento, sendo pedida a ordem ocupada por um dado elemento. Apesar de o Gonçalo e a Tânia terem demonstrado um nível de desempenho baixo neste tipo de problemas, tentaram usar, em algumas destas tarefas, o raciocínio inverso do utilizado em questões prévias, aplicando desta forma estratégias de natureza explícita, como se verificou nas tarefas *Os lembretes da Joana* e *A Pizzaria Sole Mio*.

Entre o conjunto de estratégias categorizáveis, analisadas no trabalho desenvolvido pelos alunos, foram identificadas duas situações nas quais recorreram a uma abordagem que não seria expectável, considerando o tipo de questão proposta. Nas tarefas *Sequências de números* e *Dobragens*, perante a necessidade de generalizar para termos distantes, prolongaram as respectivas sequências até encontrarem os elementos pretendidos.

13.2.8.2. Dificuldades emergentes do trabalho dos alunos

Durante a fase de exploração das tarefas, os alunos evidenciaram algumas dificuldades associadas à resolução de questões de generalização distante, maioritariamente aquelas que envolviam a reversibilidade do pensamento.

Na tarefa *Os lembretes da Joana*, aplicaram estratégias de natureza explícita em todas as questões de generalização distante. Nas questões que implicavam a reversibilidade do pensamento, tentaram utilizar o raciocínio inverso, mantendo o tipo de estratégia, no entanto acabaram por misturar as variáveis lembretes e *pioneses*, perdendo a dado momento a noção do significado dos números. Nas tarefas *Dobragens* e *Sequência de* *losangos*, apesar de terem determinado correctamente termos das sequências conhecida a sua ordem, não foram bem sucedidos quando a questão foi colocada de forma inversa, utilizando abordagens completamente desadequadas.

É ainda pertinente salientar que em algumas tarefas os alunos não conseguiram estruturar uma resposta para o cálculo de termos distantes, nomeadamente nas tarefas *Piscinas*, *Sequência de números* e *Cubos de chocolate*. Na tarefa *Piscinas*, apesar de terem utilizado, de forma adequada, estratégias explícitas no cálculo dos azulejos azuis e brancos, presentes numa piscina de dimensões 30×90, não foram capazes de encontrar uma estratégia de generalização para a questão *3*, cuja formulação é inversa da anterior. Nas tarefas *Sequência de números* e *Cubos de chocolate* a ausência de resposta na generalização pode estar relacionada com a fixação pelas estratégias aplicadas previamente, respectivamente a recursiva e a contagem, sendo incapazes de encontrar uma alternativa para determinar valores distantes.

Estes alunos revelaram também algumas dificuldades na descrição de regras associadas a determinados padrões. Por exemplo nas tarefas *Sequência de números* e *Dobragens*, optaram quase sempre por descrever as regras recorrendo a esquemas que apenas salientavam particularidades do padrão em causa, em detrimento da linguagem corrente. Nestes casos as regras definidas pelo Gonçalo e pela Tânia traduzem relações de tipo recursivo e não funcional, como se pretendia. Salienta-se ainda que, em determinadas tarefas, como *Dobragens* e *A Pizzaria Sole Mio,* estes alunos apresentaram regras descritas factualmente (Radford, 2008).

13.2.8.3. Papel da visualização no desempenho dos alunos

Nas questões de generalização próxima, o Gonçalo e a Tânia privilegiaram, de forma evidente, uma estratégia de natureza visual, a contagem. Neste tipo de questões optaram quase sempre pela representação visual dos termos pretendidos, procedendo à contagem dos seus elementos, o que os conduziu sempre à obtenção de uma resposta correcta.

No âmbito da generalização distante usaram maioritariamente a estratégia explícita, também esta de natureza visual. Registou-se apenas um caso no qual esta abordagem não foi eficaz e sucedeu na tarefa *Os lembretes da Joana*. A dado momento os alunos restringiram o seu trabalho ao plano numérico misturando as variáveis em jogo.

Reconheceram que a contagem nem sempre é uma estratégia eficaz, principalmente se se pretende determinar termos distantes de uma sequência. Apesar de estes alunos terem privilegiado a contagem na descoberta de termos próximos, mudaram sempre de estratégia ao passar para a generalização distante. Analisando a forma como utilizaram esta estratégia, verifica-se que em todos os casos efectuaram contagens unitárias, limitando-se a contar um a um os elementos presentes nas representações usadas. Este processo pode ter comprometido a formulação de regras, baseadas na disposição espacial dos elementos, por exemplo na tarefa *Cubos de chocolate*.

Algumas das dificuldades identificadas em determinadas tarefas podem estar relacionadas com o nível de compreensão de certos conceitos geométricos e com o nível de desenvolvimento de capacidades associadas à visualização espacial. Verificou-se que os conceitos de área e perímetro nem sempre foram correctamente utilizados, condicionando a adequação das abordagens utilizadas, por exemplo nas tarefas *Dobragens* e *Sequência de losangos*. A incapacidade de formular uma regra que relacionasse directamente as variáveis envolvidas nas tarefas *Dobragens* e *Cubos de chocolate*, pode atribuir-se ao facto de as suas capacidades de visualização espacial não estarem totalmente desenvolvidas.

CAPÍTULO 14

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Este capítulo organiza-se em quatro secções. Na primeira, é feita uma introdução com o propósito de realçar alguns aspectos centrais do estudo, focando os objectivos e as questões de investigação que orientaram este trabalho, bem como algumas opções metodológicas. Na secção seguinte, apresentam-se as principais conclusões do estudo, organizando a discussão em torno das questões delineadas inicialmente. Na terceira secção, são propostas algumas recomendações, decorrentes dos resultados desta investigação, com enfoque na prática profissional e em sugestões para futuras investigações. Finalmente, é feita uma reflexão acerca das limitações do estudo.

14.1. Introdução

Com a realização deste estudo procurou-se compreender o modo como alunos do 6.º ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais. Neste sentido foi analisado, de forma detalhada, o trabalho desenvolvido por duas turmas deste nível de ensino e, em particular, por dois pares de alunos de cada turma.

De modo a atingir o objectivo proposto, foram formuladas algumas questões que orientaram o trabalho e que abrangeram diferentes dimensões desta problemática. Pretendeu-se então dar resposta às seguintes questões de investigação:

1. Como se caracterizam as estratégias de generalização aplicadas pelos alunos e de que forma são utilizadas?
2. Que dificuldades ou erros emergem do seu trabalho?
3. Qual o papel da visualização no desempenho dos alunos?
4. Qual o impacto da resolução de problemas com padrões, em contextos visuais, na capacidade de os alunos generalizarem?

Tratou-se de um estudo longitudinal, com a duração de um ano lectivo, no qual se optou por uma metodologia mista, predominantemente qualitativa, em que cada um dos quatro pares seleccionados constituiu um caso neste estudo. Nesta investigação, pretendia-se fundamentalmente compreender, de forma detalhada, os processos envolvidos na exploração de padrões de natureza visual, o que fundamenta a opção por estudos de caso, no entanto, era também importante analisar o desempenho e a evolução dos alunos ao longo do estudo. Para isso, contemplou-se uma componente quantitativa, caracterizada por um *design* quase-experimental, que incluiu um pré-teste e um pós-teste, bem como a participação de um grupo de controlo.

Na recolha de dados foram utilizadas entrevistas semi-estruturadas, observação de aulas, gravações áudio e vídeo, vários tipos de documentos e um teste de avaliação do desempenho dos alunos em tarefas que envolviam a exploração de padrões. A análise de dados seguiu maioritariamente o modelo interactivo (Miles & Huberman, 1994), já que as fases de recolha e a análise decorreram de forma cíclica e integrada.

14.2. Conclusões do estudo

Nesta secção são apresentadas as conclusões deste trabalho, organizadas de acordo com as questões de investigação propostas inicialmente. Para cada uma é feita uma síntese dos aspectos mais relevantes identificados nos quatro estudos de caso, focando, sempre que se considerar pertinente, alguns resultados referentes às turmas a que pertenciam.

14.2.1. Estratégias de generalização

Categorização das estratégias de generalização utilizadas pelos alunos. No presente trabalho foi possível verificar que os alunos das turmas A e B aplicaram, ao longo do estudo, uma grande diversidade de estratégias de generalização que podem ser categorizadas como: *contagem*, *termo unidade*, *diferença*, *explícita* e *tentativa e erro*. Em algumas destas categorias, foram ainda identificadas subcategorias mais refinadas, nomeadamente no âmbito das estratégias termo unidade e diferença. A análise dos quatro casos estudados sugeriu preferências diferentes, por parte destes alunos, no que refere à forma como resolveram as tarefas propostas (Tabela 53). O António e o Daniel utilizaram todos os tipos de estratégias definidos na categorização adoptada neste estudo. Já a Carla e a Margarida, bem como a Andreia e a Diana, nunca utilizaram no seu trabalho a estratégia termo unidade. Por sua vez, o Gonçalo e a Tânia restringiram-se à aplicação de três tipos de estratégias: contagem, diferença e explícita. Estes resultados evidenciam que tarefas do tipo das que foram propostas, envolvendo a exploração de padrões em contextos visuais, promovem a emergência de múltiplas estratégias de generalização, potenciando o desenvolvimento de um raciocínio mais flexível, tal como é destacado em vários estudos realizados com o propósito de analisar as estratégias de generalização, evidenciadas por alunos de diferentes faixas etárias, na resolução de problemas baseados na exploração de padrões (e.g. Lannin, 2005; Lannin, Barker & Townsend, 2006; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999; Becker & Rivera, 2005; Stacey, 1989).

Tabela 53 - Estratégias de generalização usadas pelos quatro pares na resolução das tarefas

Carla e Margarida	António e Daniel	Andreia e Diana	Gonçalo e Tânia
Contagem	Contagem	Contagem	Contagem
Diferença	Termo unidade	Diferença	Diferença
Explícita	Diferença	Explícita	Explícita
Tentativa e erro	Explícita	Tentativa e erro	
	Tentativa e erro		

Frequência de utilização das estratégias de generalização. Como já foi referido, os alunos utilizaram, durante a fase de exploração das tarefas, vários tipos de estratégias de generalização, no entanto algumas dessas estratégias foram utilizadas de forma mais frequente do que outras. A análise das resoluções apresentadas pelos pares das duas turmas, permitiu concluir que as estratégias mais vezes aplicadas foram a contagem e a explícita. Apesar de vários autores (e.g. Lannin, Barker & Townsend, 2006; Noss, Healy & Hoyles, 1997; Orton & Orton, 1999) referirem que os alunos revelam uma clara tendência para generalizar recursivamente, em detrimento da formulação de uma regra que relacione as variáveis dependente e independente, os resultados deste estudo não reflectem a predominância da estratégia diferença no trabalho desenvolvido pelos alunos observados. Houve inclusivamente situações em que a estratégia diferença não foi utilizada, em nenhuma das turmas, como foi o caso das tarefas *Piscinas*, *Sequência de losangos* e *Cubos de chocolate*. Os padrões associados a estas tarefas têm estrutura não linear, o que poderia fundamentar a não utilização de um raciocínio recursivo, pelo facto de a diferença entre termos consecutivos não ser constante (Noss, Healy & Hoyles, 1997). No entanto, Orton e

Orton (1999) defendem que a fixação que a maioria dos alunos apresenta pela abordagem recursiva reflecte-se tanto nos padrões de tipo linear como nos de tipo não linear.

Analise-se agora a frequência de utilização de cada uma das estratégias pelos alunos-caso. A contagem foi uma das estratégias mais frequentes no trabalho destes alunos, aplicada maioritariamente na resolução de questões de generalização próxima, tal como é referido na literatura (e.g. Lannin, 2005; Stacey, 1989). Apenas a Carla e a Margarida utilizaram a contagem na generalização distante, na tarefa *Dobragens*, por não terem encontrado uma abordagem alternativa. Quanto à estratégia termo unidade, apenas foi utilizada por um dos quatro pares estudados, o António e o Daniel. Este grupo usou esta abordagem na resolução da tarefa *Os lembretes da Joana*, tanto em situações de generalização próxima como distante, privilegiando um raciocínio multiplicativo que os induziu a utilizar a proporcionalidade directa. A estratégia diferença, na sua vertente recursiva (D_1), foi utilizada pelos quatro pares na resolução da tarefa *Sequência de números*, quer para valores próximos quer distantes. Esta mesma abordagem foi ainda aplicada na descoberta de valores próximos e distantes, na tarefa *Dobragens*, pelo António e o Daniel, pela Andreia e a Diana e ainda pelo Gonçalo e a Tânia. Surgiram ainda outras estratégias, no âmbito da categoria diferença (D_2 e D_3), na resolução de questões de generalização distante que implicavam a reversibilidade do pensamento, mas foram usadas de forma pontual pelos pares Carla e Margarida e Andreia e Diana. À semelhança da contagem, a estratégia explícita surgiu de forma muito frequente no trabalho dos quatro grupos, maioritariamente na resolução de questões de generalização distante, facto já destacado em diversos estudos (e.g. Lannin, Barker & Townsend, 2006; Stacey, 1989). Os pares Carla e Margarida e Andreia e Diana, aplicaram este tipo de estratégia no cálculo de valores próximos, identificando de imediato uma relação explícita entre as variáveis, respectivamente nas tarefas *A Pizzaria Sole Mio* e *Sequência de losangos*. Finalmente, a tentativa e erro foi utilizada de forma pouco frequente por todos os pares excepto pelo Gonçalo e pela Tânia que nunca recorreram a este tipo de abordagem. Esta estratégia foi quase sempre aplicada quando os alunos estavam perante questões de generalização distante que promoviam a reversibilidade do pensamento. Nestes casos a utilização da tentativa e erro foi sempre orientada pela descoberta prévia de uma relação entre as variáveis dependente e independente, caracterizando-se por uma situação de conjectura e teste. Segundo Mason (1996), esta é o contexto ideal de aplicação da tentativa e erro para garantir uma generalização bem sucedida, tendo em consideração todas as condições do problema e compreendendo a relação entre as variáveis apresentadas.

Factores que condicionam a utilização das estratégias. Lannin, Barker e Townsend (2006) defendem que a escolha e a utilização das estratégias de generalização podem ser condicionadas por diversos factores, nomeadamente: (1) factores sociais, resultantes das interacções entre os intervenientes, que podem ter implicações no pensamento dos alunos; (2) factores cognitivos, uma vez que as estruturas mentais e o conhecimento prévio dos alunos têm influência directa na forma como organizam o seu raciocínio; e (3) aspectos relacionados com a natureza da tarefa, que incluem, por exemplo, a sua estrutura matemática, o tipo de padrão que lhe está subjacente, o modo como as questões estão formuladas e os valores atribuídos às variáveis. Uma vez que não era objectivo deste estudo analisar o impacto das interacções sociais no raciocínio dos alunos, serão apenas considerados nesta discussão os dois últimos factores destacados pelos autores supracitados. Na Tabela 54 encontra-se uma síntese de alguns factores que contribuíram para a utilização de determinadas estratégias por parte dos alunos-caso.

As tarefas propostas neste estudo foram estruturadas com o objectivo de possibilitar a aplicação de múltiplas estratégias de generalização, havendo evidências de que os problemas que envolvem a procura de padrões visuais podem conduzir à aplicação de diversas abordagens para chegar à generalização (Kenney, Zawojewski & Silver, 1998; Stacey, 1989; Steele, 2008; Swafford & Langrall, 2000). No entanto, em alguns casos, verificou-se que determinados problemas potenciaram a utilização de estratégias particulares, sendo evidente a sua predominância. Na turma A, esta situação sucedeu com as tarefas *Piscinas*, *Sequência de números*, *Dobragens* e *Cubos de chocolate*. Na turma B, para além das tarefas referidas, destacou-se ainda a tarefa *Sequência de losangos*.

Na resolução da tarefa *Piscinas* prevaleceu a estratégia explícita. O padrão subjacente a este problema envolvia a variação simultânea de duas variáveis, representativas das dimensões das piscinas, o que pode fundamentar a necessidade de encontrar uma regra que relacionasse directamente essas dimensões com o número de azulejos de cada cor, preterindo desta forma o recurso a outro tipo de estratégias. Os quatro pares de alunos estudados usaram uma abordagem semelhante na exploração desta tarefa, começando por desenhar um caso particular de uma a piscina que deu posteriormente lugar à descoberta de uma relação explícita na resolução das questões de generalização distante, através da identificação da disposição dos azulejos de cada cor. A estrutura matemática da tarefa parece ter influenciado a escolha das estratégias utilizadas. Alguns autores (e.g. Noss, Healy & Hoyles, 1997; Stacey & MacGregor, 2001) referem que quando a relação recursiva não é óbvia, como acontece neste padrão, os alunos tendem a centrar-se na relação entre as variáveis. Neste caso a descoberta de uma relação recursiva não era tão evidente como em outras tarefas, conduzindo os alunos à utilização de outro tipo de abordagens.

Na tarefa *Sequência de números* houve uma predominância evidente da estratégia recursiva (D_1). Embora a sequência apresentada tivesse uma forte componente visual, associada à disposição espacial dos seus elementos, o contexto numérico prendeu a atenção dos alunos, conduzindo a maioria à utilização da diferença entre termos consecutivos, quer por linha quer por coluna, de forma a encontrar os números pretendidos. No que refere a esta tarefa, os alunos-caso, apesar de evidenciarem ligeiras diferenças no seu trabalho, apresentaram preferência por um raciocínio de tipo recursivo, centrando-se na diferença entre termos consecutivos dispostos por linha ou numa determinada coluna.

A estratégia recursiva (D_1) voltou a ser a mais utilizada na exploração da tarefa *Dobragens*, em ambas as turmas. A estrutura matemática da tarefa parece ter estado na base da preferência por esta abordagem. Trata-se de um padrão de natureza exponencial, o que pode ter tornado complexa a descoberta de uma regra explícita para relacionar as variáveis número de dobragens e número de partes em que a folha fica dividida. Poucos alunos foram capazes de identificar uma relação deste tipo. Além disso, considerando que estes alunos frequentam o 6.º ano de escolaridade, o seu conhecimento acerca das potências pode não estar tão consolidado como o de outros conceitos como a adição, a subtracção, a multiplicação e a divisão, que surgem nos padrões de tipo linear, o que reforça a importância das estruturas cognitivas na resolução de problemas e, em particular, na escolha das estratégias a utilizar (Lannin, Barker & Townsend, 2006). Centrando a análise no trabalho dos estudos de caso, verificou-se que três destes pares, o António e o Daniel, a Andreia e a Diana e o Gonçalo e a Tânia, identificaram que, após cada dobragem, o número de partes em que a folha ficaria dividida duplicava, o que contribuiu para que privilegiassem a estratégia recursiva ao longo da tarefa. Por sua vez, a Carla e a Margarida centraram-se na componente visual do padrão e não identificaram a variação ocorrida a cada dobragem efectuada. Optaram por utilizar como estratégia de generalização a contagem, com base na dobragem da folha de jornal. Como é natural, este tipo de material apresenta limitações físicas, tendo assim condicionado a utilização desta abordagem para valores distantes.

A tarefa *Cubos de chocolate* potenciou a utilização da estratégia contagem. Na exploração desta tarefa, os alunos tiveram acesso a cubos de encaixe para modelar a situação proposta, facto que pode ter contribuído, pelo menos numa fase inicial, para a predominância desta abordagem. Poucos alunos conseguiram formular regras que relacionassem a aresta do cubo com o número de cubos unitários com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolates. Tal como na tarefa *Dobragens*, o conhecimento matemático dos alunos pode ter sido um factor impeditivo para a utilização de outras estratégias (Lannin, Barker & Townsend, 2006), neste caso foram identificadas dificuldades relacionadas com conceitos geométricos. A análise do trabalho desenvolvido pelos alunos-caso reflecte esta situação. Todos recorreram ao material fornecido para construir os cubos pretendidos, contando posteriormente o número de cubos unitários de cada tipo, mas não foram capazes de delinear uma estratégia que lhes permitisse tirar conclusões para o cubo de aresta 10, uma vez que não conseguiram libertar-se da utilização do material concreto.

Por fim a tarefa *Sequência de losangos* motivou, na turma B, uma preferência clara pela estratégia explícita. No entanto, os estudos de caso referentes a esta turma apresentaram um trabalho diferenciado. A Andreia e a Diana privilegiaram esta estratégia, tanto na generalização próxima como distante. O facto de, no enunciado da tarefa, terem sido fornecidas as representações dos três primeiros termos da sequência parece ter sido crucial para que estas alunas descobrissem, de forma imediata, a relação existente entre o lado de um losango e o número de peças que o constituem. Por sua vez, o Gonçalo e a Tânia começaram por recorrer à contagem na generalização próxima, desenhando o losango de lado 4, e só posteriormente deduziram uma regra explícita, com base na observação das representações dos quatro primeiros termos da sequência.

Todas as tarefas propostas ao longo da experiência de ensino contemplaram questões de generalização próxima e distante. Foi possível observar que a ordem de grandeza dos valores atribuídos às variáveis influenciou o tipo de estratégias adoptadas pelos alunos. Em geral, nas duas turmas, foram utilizadas estratégias distintas na resolução destes dois tipos de questões, tal como é referido na literatura (e.g. Lannin, Barker & Townsend, 2006; Stacey, 1989). Relativamente aos casos estudados, este facto também se verificou à excepção de algumas tarefas. Na tarefa *Sequência de números*, a abordagem adoptada pelos quatro grupos de alunos foi semelhante, tendo optado pela estratégia recursiva, quer na generalização próxima quer distante. Para além desta tarefa, a Carla e a Margarida mantiveram a mesma abordagem, para tipos de generalização diferentes, na tarefa *A Pizzaria Sole Mio*, na qual desde logo identificaram uma regra explícita, bem como na tarefa *Dobragens*, onde começaram por utilizar a contagem para valores próximos da variável independente, continuando a recorrer a esta abordagem para valores distantes. Por sua vez, a Andreia e a Diana também usaram o mesmo tipo de estratégias para questões de generalização próxima e distante na exploração das tarefas *Dobragens* e *Sequência de losangos*, recorrendo ao raciocínio recursivo no primeiro caso e à estratégia explícita no segundo.

Notou-se, ao longo do estudo, que as estratégias usadas pelos alunos foram também condicionadas pela ordem de grandeza dos valores atribuídos às variáveis. Analisando as estratégias utilizadas em questões de generalização próxima e distante, conclui-se que no primeiro caso os alunos deram preferência à contagem e na descoberta de valores distantes destacou-se a estratégia explícita. Segundo Lannin (2005), na resolução de tarefas que envolvem contextos visuais, há quase uma tendência natural para privilegiar a contagem no cálculo de termos próximos e para termos distantes é comum que os alunos utilizem a estratégia explícita, através da construção de uma regra imediata que estabeleça a relação entre as variáveis dependente e independente. No entanto, é pertinente destacar que na resolução de questões de generalização distante, apesar de ter sido preferencialmente utilizada a estratégia explícita, identificou-se uma maior diversidade de estratégias, em parte devido à formulação das perguntas. Na maioria das tarefas foram propostas questões de dois tipos: (1) determinar um termo da sequência conhecida a sua ordem; e (2) a questão inversa, ou seja, conhecendo um determinado termo descobrir a ordem que ocupa na sequência. Nas questões do tipo (1), apesar de também terem recorrido a outras abordagens, os alunos dos quatro pares estudados deram preferência clara à estratégia explícita. Na resolução de questões do tipo (2) notou-se maior divergência entre os pares. A Carla e a Margarida e a Andreia e a Diana nunca recorreram à estratégia explícita, tendo optado por outras estratégias, das quais se destaca a tentativa e erro. Este facto revela que as alunas em causa em nenhuma situação utilizaram o raciocínio inverso, com base nas regras descobertas previamente. Já o Gonçalo e a Tânia, sempre que deram uma resposta categorizável, deram preferência à estratégia explícita, usando as relações entre as variáveis, deduzidas nas questões anteriores. Por fim, o António e o Daniel aplicaram uma grande diversidade de estratégias, nas questões que envolviam a reversibilidade do pensamento, que variaram entre a termo unidade, a explícita, a diferença e a tentativa e erro, apresentando uma ligeira tendência para a utilização da tentativa erro.

Para além da ordem de grandeza dos valores propostos nas tarefas, outro factor que poderá condicionar a escolha das estratégias de generalização relaciona-se com as características dos números atribuídos às variáveis. Na resolução da tarefa *Os lembretes da Joana*, esta situação verificou-se em ambas as turmas, de forma ligeiramente mais acentuada na turma B. No enunciado da tarefa era apresentada uma representação visual do 3.º termo da sequência, pedindo-se, na primeira questão, que os alunos determinassem o 6.º termo. Alguns grupos usaram a estratégia termo unidade sem ajuste (TU_1) para resolver este problema. Relativamente aos alunos-caso, apenas o par António e Daniel usaram esta abordagem, tendo por base um raciocínio de tipo proporcional. O facto de os números serem apelativos do ponto de vista multiplicativo poderá ter motivado a opção por este tipo de estratégia (Sasman, Olivier & Linchevski, 1999). Outra estratégia que reflecte a utilização de um raciocínio proporcional e que também surgiu na resolução desta tarefa, foi o recurso a múltiplos da diferença entre termos consecutivos (D_2). A Andreia e Diana usaram esta para determinar o número de lembretes que poderiam pendurar usando 600 *pioneses*. O facto de se tratar de um *número apelativo*, dado que a diferença constante era de 3 unidades, e de a questão implicar a reversibilidade do pensamento, o que é normalmente mais difícil para os alunos (Warren & Cooper, 2006), contribuíram para que desistissem da estratégia explícita, que tinham aplicado em questões anteriores, para passarem a utilizar D_2.

Tabela 54 - Influência de alguns factores na utilização das estratégias de generalização

		Carla Margarida	António Daniel	Andreia Diana	Gonçalo Tânia
Estrutura do padrão	Duas variáveis (Tarefa 2)	Explícita	Explícita	Explícita	Explícita
	Numérico (Tarefa 3)	Recursiva	Recursiva	Recursiva	Recursiva
	Exponencial (Tarefa 5)	Contagem	Recursiva	Recursiva	Recursiva
Tipo de generalização	Próxima	Contagem	Contagem	Contagem	Contagem
	Distante	Explícita	Explícita	Explícita	Explícita
	Distante (com reversibilidade do pensamento)	Tentativa e erro	Tentativa e erro	Tentativa e erro	Explícita
Conhecimentos matemáticos	Potências (Tarefa5)	Contagem (não identificaram uma relação funcional)	Recursiva (não identificaram uma relação funcional)	Recursiva (não identificaram uma relação funcional)	Recursiva (não identificaram uma relação funcional)
	Visualização espacial (Tarefa 7)	Contagem (não generalizaram para termos distantes)	Contagem (não generalizaram para termos distantes)	Contagem (não generalizaram para termos distantes)	Contagem (não generalizaram para termos distantes)

Compreensão das potencialidades das estratégias de generalização. É fundamental que os alunos sejam capazes de aplicar e adaptar uma grande diversidade de estratégias na resolução de problemas (NCTM, 2000), mas é igualmente importante que compreendam as vantagens e limitações dessas abordagens, em face das situações problemáticas que lhes são apresentadas. Relativamente a este tópico, foi possível identificar, ao longo do estudo, casos em que os alunos evidenciaram essa compreensão e outros em que adoptaram estratégias que não seriam expectáveis na resolução de determinadas questões.

A contagem e a estratégia recursiva (D_1) são bastante úteis quando se trata da descoberta de termos próximos numa sequência, no entanto podem revelar-se difíceis de aplicar na generalização distante. No que refere à contagem, os alunos dos quatro pares estudados reconheceram que se tratava de um processo exaustivo e que lhes tomaria muito tempo na descoberta de termos distantes. Desta forma, sempre que utilizaram a contagem na generalização próxima, mudaram de estratégia ao passar para a generalização distante, optando normalmente por outra que lhes permitisse uma resolução mais rápida. Apenas a Carla e a Margarida utilizaram a contagem na generalização distante, na exploração da tarefa *Dobragens*, uma vez que não identificaram outra abordagem que se adequasse ao problema proposto. Quanto à estratégia recursiva verificou-se que foi utilizada quer na generalização próxima quer na generalização distante. Desde que conseguissem dar resposta à questão colocada, independentemente de se tratar da descoberta de um valor próximo ou distante, a estratégia em causa era considerada útil pelos alunos. Esta situação foi evidente na resolução da tarefa *Dobragens*, na qual todos os pares excepto a Carla e a Margarida recorreram a um raciocínio de tipo recursivo, perante a incapacidade de encontrarem uma relação funcional. No entanto, puderam verificar que, no caso da ordem do termo pretendido ser muito distante, a estratégia recursiva não é uma abordagem adequada e isto foi evidente no trabalho apresentado pelos quatro pares na tarefa *Sequência de números*.

Estes alunos reconheceram as potencialidades da estratégia explícita, principalmente na resolução de questões de generalização distante. Os alunos-caso admitiram que este processo permite resoluções mais expeditas, através de cálculos rápidos e directos, mas em determinadas tarefas não foram capazes de formular relações desta natureza, nomeadamente, nas tarefas *Dobragens* e *Cubos de chocolate*, evidenciando assim que nem sempre é fácil para os alunos construir uma estratégia explícita.

Quanto à estratégia tentativa e erro, apenas três dos pares estudados a utilizaram: a Carla e a Margarida, o António e o Daniel e a Andreia e a Diana. A análise do trabalho destes grupos tornou evidente que, neste tipo de tarefas, a tentativa e erro facilita a resolução de questões de generalização distante que têm subjacente a reversibilidade do pensamento, tendo sido frequentemente utilizada nestes contextos, pelos pares em questão. Para a Carla e a Margarida, bem como para a Andreia e a Diana, tornou-se uma alternativa eficiente à estratégia explícita, já que evidenciaram dificuldades em usar o raciocínio inverso, sempre que lhes era pedida a ordem ocupada por um dado termo da sequência.

Por fim, a estratégia termo unidade foi usada de forma pontual e raramente a sua aplicação se revelou adequada às situações propostas. Dos alunos-caso, apenas o par

António e Daniel recorreram a este tipo de abordagem, utilizando um raciocínio proporcional quando estavam perante padrões com estrutura linear, usando desta forma um raciocínio multiplicativo. O trabalho em contextos numéricos impede frequentemente os alunos de se aperceberem da utilização de estratégias incorrectas como aconteceu neste caso (Stacey, 1989; Becker & Rivera, 2005).

14.2.2. Dificuldades emergentes do trabalho dos alunos

Eficácia das estratégias de generalização utilizadas pelos alunos. Tendo já sido discutida a frequência de utilização de cada uma das estratégias de generalização, é também pertinente analisar a adequação dessas estratégias às situações em que foram aplicadas, focando os erros cometidos pelos alunos e as dificuldades sentidas nesses casos (Tabela 55).

A contagem conduziu, quase sempre, os alunos à obtenção de respostas correctas. No entanto, houve situações em que esta estratégia não foi aplicada de forma adequada. A resolução de questões de generalização distante através da contagem constitui, normalmente, um processo moroso que pode resultar na construção de representações desadequadas ou em contagens erradas. Por exemplo, na turma A foi identificado um par de alunos que, na resolução da tarefa *Os lembretes da Joana*, decidiram desenhar 35 lembretes e os respectivos *pioneses*, efectuando posteriormente a contagem dos últimos. O elevado número de elementos presentes no desenho, conduziu os alunos a uma contagem errada. Na turma B, sucedeu uma situação semelhante na resolução da tarefa *Dobragens*, já que um dos pares dobrou a folha de jornal sete vezes, de forma a contar o número de partes em que esta ficaria dividida. As limitações físicas do material em causa contribuíram para que estes alunos contassem erradamente o número de secções encontradas na folha. Esta situação não se verificou nos alunos-caso, já que na maioria das vezes utilizaram a contagem apenas na descoberta de valores próximos. Somente a Carla e a Margarida optaram por esta abordagem na generalização distante, aquando da exploração da tarefa *Dobragens*. Perante a dificuldade em identificar as secções produzidas na folha de jornal, após sete dobragens, decidiram fazer um desenho que facilitasse a visualização das secções para assim contarem correctamente estes elementos. Outra dificuldade identificada na utilização desta estratégia relacionou-se com o modo como a contagem foi efectuada. Por vezes, contar de forma não organizada os elementos que compõem uma dada representação pode também dar lugar a respostas incorrectas. Os resultados das duas turmas na tarefa *Cubos de chocolate* reflectem este facto. Na exploração deste problema, os alunos tiveram acesso a cubos de encaixe para proceder à construção de cubos de diferentes dimensões, após a qual contavam o número de cubos unitários com 0, 1, 2 e 3 faces de chocolate. Esta contagem foi feita de forma não organizada por alguns pares que, em geral, rodavam o cubo durante o processo, obtendo um número superior ou inferior ao que era esperado. Dos quatro pares estudados, apenas o António e o Daniel cometeram este erro.

A estratégia termo unidade foi utilizada de forma pouco frequente ao longo do estudo, quer na turma A quer na turma B, apresentando um nível de sucesso bastante baixo. Esta abordagem tem subjacente um raciocínio de tipo proporcional que, dependendo da estrutura matemática da tarefa, pode não se adequar à situação problemática proposta, implicando um ajuste do resultado. Um dos erros mais comuns, associados à estratégia termo unidade, envolve a aplicação indevida de um raciocínio de tipo proporcional (Stacey, 1989; Swafford & Langrall, 2000). À excepção da tarefa *Sequência de números,* todas as outras que foram propostas, pela natureza do padrão envolvido, obrigavam a um ajuste baseado no contexto, após a utilização de um modelo proporcional (TU_3). Desta forma, as variantes TU_1 e TU_2, da estratégia termo unidade, raramente se adequavam às questões propostas nas tarefas deste estudo. A primeira porque se caracteriza pelo recurso a múltiplos de termos da sequência sem ajuste do resultado e a segunda porque, após serem utilizados múltiplos de termos da sequência, envolve uma correcção do resultado, baseada apenas em propriedades numéricas. Entre os casos estudados, apenas o António e o Daniel aplicaram a estratégia termo unidade, na resolução da tarefa *Os lembretes da Joana*. O padrão subjacente a este problema é de tipo linear, o que significa que não se enquadra num modelo de proporcionalidade directa, situação que estes alunos negligenciaram. Os erros cometidos por este par, estão relacionados com o facto de não terem formado uma imagem mental correcta do problema, caso contrário teriam concluído que o modelo que utilizaram não se adequava à situação apresentada (Lannin, Barker & Townsend, 2006). O trabalho desenvolvido num contexto exclusivamente numérico, pode também ter potenciado o recurso a estas estratégias considerando que os valores apresentados eram *apelativos* do ponto de vista multiplicativo (Sasman, Olivier & Linchevski, 1999). Quanto à estratégia TU_3, raramente foi uma opção para os alunos das duas turmas, tendo apenas sido utilizada na tarefa *Sequência de números*, conduzindo estes grupos a respostas correctas dentro da situação apresentada.

A estratégia diferença foi utilizada pelas duas turmas, em quatro das sete tarefas propostas: *Os lembretes da Joana*, *Sequência de números*, *A Pizzaria Sole Mio* e *Dobragens*. A vertente recursiva (D_1) foi a mais utilizada das três permitindo, em geral, que os alunos obtivessem respostas correctas. Sempre que esta estratégia constituiu uma opção no trabalho dos quatro grupos estudados, foi utilizada de forma adequada ao contexto. Dependendo da ordem de grandeza do valor que se pretende descobrir, a estratégia recursiva pode tornar-se um processo exaustivo, que pode ser ultrapassado utilizando múltiplos da diferença (D_2), ou seja recorrendo a um raciocínio multiplicativo. No entanto, o padrão em causa pode implicar que este resultado seja ajustado se não se tratar de uma situação de proporcionalidade directa (D_3). Verificou-se, tanto na turma A como na turma B, que a estratégia D_2 foi utilizada indevidamente na exploração de padrões de tipo linear, nas tarefas *Os lembretes da Joana* e *A Pizzaria Sole Mio*. A Andreia e a Diana, na primeira tarefa, não ajustaram o resultado obtido, após usarem um múltiplo da diferença comum e a Carla e a Margarida fizeram algo semelhante na outra tarefa mencionada. Por fim, a estratégia D_3 também foi das menos utilizadas e nem sempre conduziu os alunos a uma resposta correcta. Por exemplo, na tarefa *A Pizzaria Sole Mio*, a Andreia e a Diana começaram por usar um múltiplo da diferença entre termos consecutivos, mas o ajuste efectuado no final não teve por base o contexto da situação problemática proposta.

Como já foi referido, quer a contagem, quer a estratégia explícita foram das mais utilizadas pelos alunos que participaram neste estudo, aplicadas quase sempre de forma eficaz. No entanto, foram identificadas algumas dificuldades na formulação de regras explícitas em determinadas tarefas. Um dos factores que pode conduzir os alunos à utilização indevida desta estratégia, relaciona-se com a dedução de uma relação que se verifica para um valor particular, aplicando-a incorrectamente a outros casos (Mason, 1996). Apesar de não ter conduzido à obtenção de respostas erradas, a dedução de regras apoiadas no estudo de um ou dois casos particulares, foi uma situação recorrente no trabalho dos alunos-caso. Mas, as dificuldades mais frequentemente evidenciadas pelos alunos das duas turmas, na utilização da estratégia explícita, relacionaram-se com dois aspectos fundamentais: trabalharem num contexto puramente numérico, levando-os a confundir os valores associados às variáveis dependente e independente (Orton & Orton, 1999; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999; Becker & Rivera, 2005); e o seu conhecimento matemático (Lannin, Barker & Townsend, 2006). A primeira situação reflectiu-se, por exemplo, no trabalho apresentado pelo Gonçalo e pela Tânia na resolução da tarefa *Os lembretes da Joana*. Para determinarem o número de lembretes que poderiam pendurar com 600 *pioneses*, recorreram à relação entre as duas variáveis, descoberta previamente, no entanto no final adicionaram lembretes e *pioneses*, reflectindo deste modo não conhecer o significado dos valores em causa. A utilização adequada desta estratégia foi também condicionada pelas dificuldades sentidas por alguns alunos com determinados conceitos matemáticos, maioritariamente conceitos geométricos, nomeadamente área e perímetro. A tarefa *Piscinas* foi aquela em que esta situação foi mais evidente. Dos alunos caso, destacam-se apenas o António e o Daniel que não foram capazes de fazer a distinção entre as dimensões da piscina e as dimensões do rectângulo azul, condicionando desta forma a regra que deduziram. Por último, observou-se um enorme insucesso na utilização da estratégia explícita na exploração da tarefa *Cubos de chocolate*. Apenas um par, na turma A, foi capaz de identificar correctamente as relações existentes entre as dimensões do cubo e o número de cubos unitários de cada tipo. Os erros cometidos e as dificuldades sentidas na dedução destas regras relacionaram-se essencialmente com as capacidades associadas à visualização espacial que os alunos demonstraram ter pouco desenvolvidas. Neste caso, a incapacidade de visualizar a estrutura da situação proposta condicionou a descoberta do modelo matemático que lhe estava subjacente (Healy & Hoyles, 1996).

A tentativa e erro foi mais vezes utilizada pelos alunos da turma A do que da turma B. Os primeiros recorreram a esta estratégia na resolução das tarefas *Sequência de números*, *Dobragens*, *Piscinas* e *Sequência de losangos*, enquanto na turma B apenas surgiu nas duas últimas tarefas. Em geral, esta estratégia revelou-se bastante útil aos alunos, principalmente na resolução de questões de generalização distante que envolviam a reversibilidade do pensamento. Há, no entanto, dificuldades a salientar na utilização desta estratégia que emergiram na exploração das tarefas *Piscinas* e *Sequência de números*. Neste estudo a tentativa e erro foi sempre utilizada com o sentido de conjectura e prova, ou seja, os alunos orientavam as suas tentativas tendo por base regras já descobertas em questões anteriores. O insucesso registado na tarefa *Piscinas,* no caso da Carla e da Margarida, relacionou-se com a utilização de um contexto de resolução numérico e com dificuldades associadas a conceitos geométricos. Na tarefa *Sequência de números,* os alunos que recorreram à tentativa e erro não conseguiram chegar a qualquer conclusão, uma vez que não tinham descoberto uma regra que lhes permitisse identificar a linha ocupada por qualquer número da sequência. Esta situação foi identificada no trabalho de todos os pares excepto no do Gonçalo e da Tânia e de acordo com Radford (2008), constitui uma *indução simples*, o que impede frequentemente a chegada à generalização.

Tabela 55 - Dificuldades identificadas na utilização das estratégias de generalização

Estratégia	Carla e Margarida	António e Daniel	Andreia e Diana	Gonçalo e Tânia
Contagem	-Aplicação em questões de generalização distante (Tarefa 5)	-Contagem não organizada (Tarefa 7)		
Termo unidade		-Não ajustam o resultado após usarem o raciocínio proporcional ou ajustam com base em relações numéricas (Tarefa 1)		
Diferença	-Não ajustam o resultado após terem usado múltiplos da diferença comum (Tarefa 4)		-Não ajustam o resultado após terem usado múltiplos da diferença comum ou ajustam sem ter por base as condições do problema (Tarefas 1 e 4)	
Explícita	-Dificuldades com conceitos matemáticos (Tarefa 7)	-Dificuldades com conceitos matemáticos (Tarefas 2 e 7)	-Dificuldades com conceitos matemáticos (Tarefa 7)	-Dificuldades com conceitos matemáticos (Tarefa 7) -Junção de valores relativos a variáveis distintas (Tarefa 1)
Tentativa e erro	-Utilização da tentativa e erro no sentido de *indução simples* (Tarefa 3) -Dificuldades com conceitos matemáticos (Tarefa 2)	-Utilização da tentativa e erro no sentido de *indução simples* (Tarefa 3)	-Utilização da tentativa e erro no sentido de *indução simples* (Tarefa 3)	

Dificuldades em identificar uma relação funcional. Neste estudo, destacaram-se duas tarefas nas quais os alunos das duas turmas sentiram grandes dificuldades ao nível da generalização distante, tendo aplicado preferencialmente a contagem e a estratégia recursiva (D_1). Na tarefa *Sequência de números*, a maioria dos alunos optou por utilizar um raciocínio de tipo recursivo, prolongando a sequência até localizar os números pretendidos. Apenas um par da turma A e três da turma B foram capazes de deduzir uma regra para identificar a linha e a coluna associadas ao número 542, os restantes grupos não conseguiram encontrar uma estratégia adequada à resolução desta questão, nos quais se incluem os quatro pares de alunos estudados. Na tarefa *Cubos de chocolate*, passou-se uma situação idêntica. Todos os alunos que participaram no estudo utilizaram a contagem na descoberta de termos próximos. Construíram os cubos com as dimensões pretendidas e contaram, um a um, os cubos unitários de cada tipo. Esta forma de contagem não organizada, impediu-os de encontrar uma estratégia que lhes permitisse fazer o mesmo com o cubo de aresta 10. Perante a impossibilidade de recorrerem à contagem, não conseguiram resolver a questão. Apenas um par da turma A foi bem sucedido na descoberta de regras para cada caso, tendo previamente feito contagens organizadas baseadas na observação da disposição dos cubos unitários no cubo inicial. Vários autores têm concluído nos seus estudos que um dos grandes obstáculos à formulação de relações de tipo funcional é a fixação por abordagens como a contagem ou o raciocínio recursivo (Noss, Healy & Hoyles, 1996; Orton & Orton, 1999; Stacey, 1989). Nestes casos os alunos tendem a focar a sua atenção em apenas uma das variáveis em vez de procurar relacionar as variáveis dependente e independente, o que pode constituir um entrave à descoberta de uma regra geral, tal como aconteceu nas duas tarefas acima referidas. English e Warren (1995) vão ainda mais além nas suas conclusões afirmando que, a partir do momento em que os alunos utilizam uma estratégia recursiva, tornam-se relutantes em procurar uma relação funcional.

Ao longo do estudo, os alunos foram também revelando dificuldades na utilização de linguagem apropriada na descrição de regras, mesmo tendo identificado a sua estrutura. Warren (2008) considera que as dificuldades na descrição de um padrão ou de uma relação funcional constituem um dos maiores obstáculos à generalização. Salienta-se ainda neste âmbito que as regras formuladas pelos alunos, principalmente pelos pares Carla e a Margarida e o Gonçalo e a Tânia, evidenciaram o estabelecimento de generalizações factuais (Radford, 2008), fazendo quase sempre referência aos casos particulares estudados.

Ordem de grandeza dos valores atribuídos às variáveis. Foi evidente, em ambas as turmas, que os alunos revelaram maiores dificuldades na descoberta de valores distantes do que de valores próximos, principalmente quando estava subjacente a reversibilidade do pensamento. Warren (2008) aponta duas razões para este facto: (1) a necessidade de relacionar a ordem com termo, o que se revela complexo para muitos alunos; e (2) na maioria dos casos requer uma conhecimento aprofundado das propriedades das operações numéricas. Em geral, os alunos-caso revelaram dificuldades na resolução deste tipo de questões, em várias tarefas, aplicando estratégias desadequadas ou optando por não apresentar resposta. Na tarefa *Os lembretes da Joana*, três destes pares apresentaram abordagens desadequadas para determinar o número de lembretes que poderiam pendurar com 600 *pioneses*. O António e o Daniel usaram um raciocínio proporcional (TU_1), quando se tratava de um padrão de natureza linear, a Andreia e a Diana recorreram a um múltiplo da diferença sem ajustar o resultado (D_2), o que também não se enquadra na estrutura deste padrão e, por fim, o Gonçalo e a Tânia, apesar de terem começado por aplicar uma estratégia adequada, a explícita, adicionaram valores correspondentes a variáveis diferentes. Na tarefa *Piscinas*, os pares António e Daniel, Gonçalo e Tânia não apresentaram qualquer resposta à questão *3*, mostrando não ser capazes de usar o raciocínio inverso, com base nas regras que tinham descoberto previamente. Na tarefa *Dobragens*, a Carla e a Margarida e a Andreia e a Diana voltaram a utilizar abordagens desadequadas. O primeiro grupo recorreu a um múltiplo da diferença sem ajustar o resultado (D_2), o que não se adequa a um padrão de tipo linear. Por sua vez, a Andreia e a Diana, apesar de terem feito o ajuste (D_3) negligenciaram o contexto do problema, resultando num ajuste incorrecto. Na tarefa *Dobragens,* tanto a Carla e a Margarida como o Gonçalo e a Tânia mostraram dificuldades com o conceito de área que condicionaram a sua resolução. Finalmente, na tarefa *Sequência de losangos*, o Gonçalo e a Tânia viram novamente a sua resolução condicionada por dificuldades relacionadas com conceitos geométricos. Como se pode verificar, para além das razões apontadas por Warren, o conhecimento matemático dos alunos é também um factor fundamental na adequação das estratégias de generalização (Lannin, Barker & Townsen, 2006).

14.2.3. Papel da visualização no desempenho dos alunos

Impacto da componente visual das tarefas propostas. As tarefas utilizadas neste estudo têm uma forte componente visual, quer pelo tipo de representações apresentadas na maioria dos enunciados, quer pela possibilidade de utilização de material concreto na modelação de algumas situações problemáticas. Esta opção teve por base a ideia de que a inclusão de um suporte visual em problemas que envolvem a exploração de padrões, conduz à utilização de múltiplas abordagens para chegar à generalização (Kenney, Zawojewski & Silver, 1998; Stacey, 1989; Steele, 2008; Swafford e Langrall, 2000). Assim, perante este tipo de tarefas, os alunos podem aplicar estratégias de natureza visual ou optar por estratégias não visuais, fazendo a transferência para o contexto numérico. De facto, foi evidente ao longo do estudo, e em ambas as turmas, a utilização de uma grande diversidade de estratégias, quer visuais quer não visuais, no âmbito da categorização adoptada nesta investigação. No que refere aos alunos-caso, concluiu-se que, embora tenha havido algumas diferenças quanto à diversidade de estratégias utilizadas, todos os pares recorreram a estratégias de natureza visual e não visual, na fase de exploração das tarefas.

Natureza das estratégias de generalização utilizadas pelos alunos. As estratégias consideradas na categorização usada neste estudo foram subdivididas em dois grupos, estratégias visuais e não visuais, dependendo se a componente visual do problema tem ou não impacto na generalização (García-Cruz & Martinón, 1999; Presmeg, 1986). Neste sentido, foram agrupadas no conjunto das estratégias visuais: contagem, termo unidade com ajuste visual (TU_3), múltiplo da diferença com ajuste (D_3) e explícita. As estratégias termo unidade sem ajuste (TU_1), termo unidade com ajuste numérico (TU_2), recursiva (D_1), múltiplo da diferença sem ajuste (D_2) e tentativa e erro foram consideradas, segundo a definição dos autores, não visuais.

Apesar de todas as estratégias anteriormente destacadas terem sido utilizadas, em geral, nas duas turmas, foram privilegiadas duas estratégias de natureza visual, a contagem e a explícita, à excepção das tarefas *Sequência de números* e *Dobragens*, nas quais predominou, tanto na turma A como na turma B, a estratégia recursiva (D_1). Analisando o trabalho dos quatro pares estudados verificou-se que, em três dos grupos, foi evidenciada esta tendência, destacando-se apenas a Carla e a Margarida que somente deram preferência à estratégia recursiva na tarefa *Sequência de números*, privilegiando, nas restantes, a contagem e a explícita.

Dependendo do modo como os alunos *vêem* um determinado padrão, as abordagens de natureza visual podem potenciar a descoberta de diferentes expressões para o representar (e.g. Rivera & Becker, 2007; Vale, 2009). As tarefas *Os lembretes da Joana* e *Piscinas* foram aquelas que deram origem a uma maior diversidade de expressões, tanto na turma A como na turma B. Por exemplo, na primeira tarefa, a Carla e a Margarida, bem como a Andreia e a Diana, concluíram que cada lembrete tinha três *pioneses*, sendo necessário acrescentar mais um no final. Por sua vez, o Gonçalo e a Tânia viram que cada lembrete tinha três *pioneses*, à excepção do primeiro que precisava de quatro. Formularam assim expressões equivalentes para representar o mesmo padrão. Já na tarefa *Piscinas*, para determinar o número de azulejos brancos de uma piscina, a Andreia e a Diana subtraíram duas unidades ao comprimento da piscina, para que não houvesse sobreposição de azulejos, e só depois adicionaram os azulejos relativos a cada lado. Os restantes três pares, usaram um raciocínio semelhante no entanto deu lugar a uma expressão diferente, já que subtraíram duas unidades à altura. Nas situações em que os alunos favoreceram estratégias de natureza não visual, trabalhando num contexto puramente numérico, foram identificadas as mesmas expressões para representar o padrão explorado.

Ao analisar a forma como os alunos *viram* os padrões propostos e consequentemente a natureza da generalização estabelecida, verificou-se que, tanto na turma A como na turma B, os alunos apresentaram maioritariamente generalizações de tipo construtivo, tendo apenas sido identificado um grupo em cada turma que formulou uma generalização de natureza desconstrutiva, na resolução da tarefa *Piscinas*, aquando do cálculo do número de azulejos brancos. No que refere aos alunos-caso foi possível verificar que, em todas as tarefas, formularam generalizações de natureza construtiva, revelando que as figuras foram sempre visualizadas do ponto de vista da sua decomposição em partes disjuntas. Os resultados emergentes deste trabalho vão assim de encontro às conclusões apresentadas em diversos estudos que têm verificado que os alunos tendem a formular mais generalizações de tipo construtivo do que desconstrutivo (Rivera & Becker, 2008; English & Warren, 1995; Taplin, 1995).

Vantagens e limitações da utilização de estratégias visuais. Tendo-se verificado que a maioria dos alunos que participaram neste estudo privilegiaram estratégias de natureza visual, é fundamental compreender o impacto da utilização desse tipo de abordagens no seu desempenho. Isto implica a análise de situações em que estas estratégias foram facilitadoras do raciocínio bem como de casos em que tornaram mais complexo o trabalho dos alunos.

A contagem foi sempre uma estratégia útil na resolução de questões de generalização próxima. Depois de efectuarem a representação do termo solicitado, os alunos facilmente procediam à contagem dos elementos pretendidos. No que refere à generalização distante, foi óbvio para os alunos que se tratava de um processo muito exaustivo, sendo quase nula a sua utilização neste tipo de questões. Esta opinião foi comum aos quatro pares estudados, tendo-a demonstrado durante as entrevistas.

Apesar de a maioria dos alunos ter sido capaz de avaliar a utilidade desta estratégia nas duas situações descritas, a contagem não foi sempre aplicada da mesma forma. Duval (1998) defende que os alunos podem apreender os elementos que constituem uma figura de duas formas diferentes, perceptualmente ou discursivamente. No primeiro caso, os elementos que compõem uma dada figura são vistos isoladamente, o que no contexto da estratégia contagem implica que os alunos contem esses objectos um a um. Na apreensão discursiva, os elementos de uma figura são observados em relação uns com os outros, como uma configuração de objectos que se relacionam por uma propriedade invariante, resultando deste modo em contagens organizadas, com base na identificação de grupos de elementos. Verificou-se neste estudo que, quando a contagem foi efectuada tendo por base uma análise perceptual das figuras, constituiu um entrave para a formulação de uma regra que relacionasse directamente as variáveis consideradas. Esta situação foi evidente, no trabalho desenvolvido pelos alunos caso na tarefa *Cubos de chocolate*. Todos fizeram uma contagem um a um dos cubos unitários de cada tipo, na exploração das questões de generalização próxima, sendo incapazes de encontrar posteriormente uma relação entre as dimensões do cubo e o número de cubos unitários para os valores mais distantes. No entanto, foram também identificadas situações de contagem no trabalho dos pares estudados que evidenciaram uma interpretação de tipo discursivo, dando posteriormente lugar a regras que permitiram generalizar para valores distantes. Por exemplo, na tarefa *Os lembretes da Joana*, a Carla e a Margarida, desenharam um conjunto de 6 lembretes e os respectivos *pioneses*, no entanto não se limitaram a contar directamente o número de *pioneses*, apresentaram um cálculo representativo da forma como *viram* a distribuição dos elementos. Confirmaram na entrevista a identificação destes agrupamentos, tendo deduzido uma generalização de natureza construtiva a partir deste tipo de contagem. Este par, usou o mesmo processo na tarefa *Piscinas*. Após terem desenhado uma piscina de dimensões 10×6, fizeram uma contagem organizada dos azulejos de cada cor, baseada na identificação de grupos de elementos na figura. Apesar de não haver um registo escrito deste tipo de abordagem no trabalho dos restantes três pares, há evidências da sua utilização em várias tarefas, nas quais começaram por aplicar a contagem, passando de imediato para uma regra de tipo explícito, ao ser pedido um valor distante. Estes resultados confirmam a relevância da apreensão discursiva das figuras que contribui não só para o estabelecimento de generalizações bem sucedidas, mas também para a formulação de diferentes expressões para o mesmo padrão (Rivera & Becker, 2008).

À semelhança da contagem, a estratégia explícita foi uma das mais utilizadas pelos alunos neste estudo. As regras deduzidas tinham por base o estabelecimento de relações entre as variáveis dependente e independente, resultantes da apreensão de propriedades invariantes descobertas, geralmente, a partir de figuras. Esta estratégia foi particularmente útil e eficaz na resolução de questões de generalização distante, constituindo um processo expedito para chegar à solução. A utilização da estratégia explícita foi mais frequente quando na tarefa estavam presentes *figuras transparentes* (Sasman, Olivier & Linchevski, 1999) que permitiam apreender de forma imediata a relação entre as variáveis, como foi o caso das tarefas *Os lembretes da Joana*, *Piscinas*, *A Pizzaria Sole Mio* e *Sequência de losangos*, já que a estrutura do padrão era visualmente perceptível. No entanto, foi notório que os alunos nem sempre foram capazes de utilizar a estratégia explícita. Os resultados relativos às tarefas *Dobragens* e *Cubos de chocolate* reflectem este facto. Na primeira tarefa, pedia-se que identificassem uma regra que relacionasse o número de dobragens com o número de partes em que a folha ficaria dividida e, neste caso nenhum dos quatro pares conseguiu apresentar uma relação funcional. A Carla e a Margarida basearam a sua resposta num caso particular e os restantes três pares usaram uma relação recursiva, fixando-se apenas nos valores da variável dependente. Esta situação pode reflectir a dificuldade dos alunos em deduzir uma relação funcional tendo por base o contexto visual apresentado, no qual estaria envolvido o conceito de área. Na tarefa *Cubos de chocolate*, também não foram capazes de estruturar uma regra explícita através da observação da disposição dos cubos unitários, o que pode revelar dificuldades ao nível da visualização espacial, condicionando o estabelecimento da generalização distante.

As estratégias termo unidade com ajuste visual (TU_3) e múltiplo da diferença com ajuste (D_3) foram utilizadas pontualmente e nem sempre de forma bem sucedida. Qualquer uma delas implicava uma forte imagem visual do problema, já que ambas envolviam um ajuste do resultado baseado no contexto apresentado. Foram utilizadas, em ambas as turmas, nas mesmas tarefas. TU_3 surgiu na tarefa *Sequência de números* e D_3 nas tarefas *Os lembretes da Joana* e *A Pizzaria Sole Mio*. Quanto aos estudos de caso, apenas a Carla e a Margarida e a Andreia e a Diana recorreram à estratégia D_3. O primeiro par usou esta abordagem de forma adequada na tarefa *Os lembretes da Joana*. Após terem utilizado um múltiplo da diferença entre termos consecutivos, o resultado foi ajustado revelando uma correcta apropriação do contexto do problema. No caso da Andreia e da Diana, que utilizaram esta estratégia na tarefa *A Pizzaria Sole Mio*, o ajuste não foi efectuado correctamente. A pouca frequência com que estas estratégias foram utilizadas e os erros que por vezes emergiram da sua aplicação são fundamentados pela complexidade do raciocínio, em termos visuais, associado ao tipo de ajuste que envolvem (Rivera & Becker, 2008)

14.2.4. Impacto da resolução de problemas com padrões visuais na capacidade de generalizar

Para além de descrever, de forma detalhada, o trabalho desenvolvido pelos alunos que participaram nesta investigação, no âmbito da resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões visuais, destacando em particular dois pares de cada turma, este estudo procurou ainda analisar a evolução dos alunos, no que refere à capacidade de generalizar, após a experiência de ensino.

Os resultados decorrentes deste trabalho indicam que, a intervenção centrada na exploração de tarefas, com enfoque na descoberta de padrões em contextos visuais, seguida de momentos de discussão em grande grupo, onde os alunos tiveram a oportunidade de apresentar as estratégias de generalização utilizadas e debater estratégias alternativas, contribuiu para uma melhoria do seu desempenho, ao nível da generalização.

Para avaliar, de forma objectiva, a existência de diferenças no desempenho dos alunos das duas turmas, foi implementado um teste, no início e no final do estudo, proposto também numa terceira turma que não participou da fase de exploração das tarefas e por isso actuou como grupo de controlo. Os resultados do pré-teste e do pós-teste permitiram reunir um conjunto de evidências que, por um lado, possibilitaram a análise da existência de diferenças estatisticamente significativas, da primeira para a segunda aplicação do teste, mas também contribuíram com alguns indicadores relativos ao modo como os alunos resolvem problemas que potenciam a generalização.

Inicialmente foi efectuado um estudo estatístico exploratório, apenas nas turmas A e B, para avaliar se houve evolução da primeira para a segunda aplicação do teste, recorrendo ao cálculo das médias das classificações por questão e de outras medidas de localização, bem como a diagramas de extremos e quartis de forma a ter uma percepção da distribuição dos dados. Estes elementos sugeriram a existência de diferenças nos resultados dos testes, tanto na turma A como na turma B. Após esta fase, passou-se à análise de covariância (ANCOVA), tendo sido estabelecida uma comparação do desempenho dos alunos de ambas as turmas com o desempenho do grupo de controlo, que foi sujeito ao mesmo teste, no início e no final do estudo, mas que não integrou a fase de exploração das tarefas. Este procedimento estatístico permitiu estudar a influência do factor grupo (turma experimental e grupo de controlo) nos resultados do pós-teste, controlando possíveis diferenças iniciais, entre os grupos, no pré-teste. Esta análise revelou diferenças estatisticamente significativas do pré-teste para o pós-este, após a experiência de ensino, quando comparadas com o grupo de controlo ($p<0{,}05$).

Por outro lado, foram ainda identificadas diferenças do ponto de vista qualitativo, já que a forma como os alunos resolveram as mesmas questões do teste evidenciou alterações, tanto na turma A como na turma B. No que refere à continuação de sequências, houve um maior número de alunos a conseguir identificar a estrutura dos padrões de tipo visual, mostrando ter descoberto as transformações produzidas nas figuras, ao passar de um termo para o seguinte. Ainda no âmbito do prolongamento de sequências, melhoraram o seu desempenho no que refere à continuação de padrões de crescimento, embora revelassem maior sucesso com os de repetição. As diferenças mais significativas nos resultados, do pré-teste para o pós-teste, registaram-se na exploração do *Problema das missangas* que tinha subjacente um padrão linear de crescimento, tendo aumentado o número de estratégias adequadas à resolução da tarefa, em ambas as turmas. No entanto, é pertinente referir que apenas uma minoria identificou relações de tipo funcional, grande parte dos alunos optou por generalizações aritméticas, usando estratégias como a contagem e a recursiva, mesmo na generalização distante. Apenas no *Problema dos rectângulos* não houve indício de diferenças significativas nos resultados das duas turmas, já que os alunos continuaram a evidenciar o mesmo tipo de dificuldades que tinham revelado na primeira aplicação do teste, recorrendo a contagens desorganizadas. A maioria dos alunos não foi capaz de identificar a estrutura do padrão e consequentemente formular uma relação de tipo funcional. O insucesso registado nesta tarefa em particular pode ser justificado pela estrutura não transparente da figura representativa do padrão que torna mais complexa a identificação e formulação de uma regra.

14.3. Recomendações

A análise dos resultados obtidos nesta investigação sugere um conjunto de recomendações que envolvem, de uma forma geral, duas vertentes. Por um lado, são apresentadas implicações relacionadas com a prática profissional, realçando o papel do professor, mas considerou-se ainda relevante estruturar propostas para investigação futura, associadas à temática estudada.

14.3.1. Implicações para a prática profissional

A resolução de problemas ocupa um lugar central nos currículos de Matemática, como "uma actividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático" (ME-DGIDC, 2007, p. 6). Este estudo permitiu concluir que a resolução de problemas envolvendo, em particular, a generalização de padrões em contextos visuais, permite não só trabalhar uma grande diversidade de tópicos matemáticos, mas também potencia a utilização de múltiplas estratégias. Deste modo, o professor deve propor este tipo de tarefas já que lhe permitem criar oportunidades para que os alunos desenvolvam um raciocínio mais flexível, procurando que usem e compreendam as potencialidades de diferentes tipos de representações matemáticas. Tendo ainda em consideração que os alunos tendem a processar a informação de forma diferente, havendo aqueles que apresentam preferência por uma abordagem visual e os que preferem abordagens mais analíticas, este tipo de tarefas possibilitam o envolvimento de um maior número de alunos por promoverem a aplicação de estratégias de natureza diferente.

No entanto, ao longo do estudo, foram identificadas abordagens menos frequentes do que outras, estratégias que não foram utilizadas por todos os alunos e ainda outras que se revelaram desadequadas, no âmbito da situação problemática proposta. Neste quadro geral, é fundamental que os alunos compreendam as vantagens e as limitações das diferentes estratégias e desenvolvam a capacidade de as utilizar de forma correcta. Deste modo, cabe ao professor proporcionar espaços de discussão na aula de Matemática, para que os alunos possam verbalizar as suas ideias e interagir, com o objectivo de discutir estratégias adoptadas e abordagens alternativas. Este momento de partilha e reflexão poderá contribuir para que os alunos estabeleçam conexões entre diferentes tipos de representações, aumentando a flexibilidade do seu raciocínio, tanto na resolução de uma tarefa específica como de tarefas distintas, através da comparação das estratégias utilizadas.

Para além da promoção de um pensamento cada vez mais flexível, o professor deve ainda ter a preocupação de criar oportunidades para que os alunos reflictam acerca dos erros cometidos e das dificuldades sentidas no desenvolvimento do seu trabalho, para que possam compreender a sua desadequação às situações propostas (Hiebert & Wearne, 1993). Erros como a utilização indevida da proporcionalidade directa, como aconteceu neste estudo, podem ser muito comuns e persistentes, bem como a utilização de estratégias que não se adequam ao tipo de questão colocada, como é o caso da opção por estratégias aditivas na generalização distante. Dar aos alunos a possibilidade de reflectir acerca destas situações pode contribuir de forma significativa para o desenvolvimento do seu conhecimento matemático e para aprofundar a sua compreensão acerca do processo de generalização.

Tal como já tinha sido apontado por outros autores (Lannin, Barker & Townsend, 2006), verificou-se que alguns factores, relacionados com a estrutura das tarefas, podem influenciar o trabalho dos alunos. Os resultados deste estudo evidenciam que a resolução de problemas centrados na generalização de padrões visuais pode ser, por exemplo, condicionada: pela ordem de grandeza dos valores atribuídos às variáveis; pelas características desses números; pela estrutura do padrão envolvido (por exemplo, linear ou não linear); e pelo modo como a questão é formulada, ou seja, se é dada a ordem e é solicitado o termo respectivo ou, se pelo contrário, se fornece o termo e é pedida a ordem ocupada na sequência. Deste modo, e porque as tarefas têm um papel central nas aulas de Matemática, torna-se fundamental que o professor contemple, na sua construção, a diversidade de factores que poderão influenciar o desempenho dos alunos, antecipando situações como o tipo de estratégias de resolução que poderão utilizar e dificuldades que poderão emergir.

14.3.2. Recomendações para futuras investigações

Alguns estudos internacionais (e.g. Lannin, Barker & Townsend 2006; Orton & Orton, 1999; Becker & Rivera, 2005; Stacey, 1989; Swafford & Langrall, 2000) têm revelado que alunos, de diferentes níveis de ensino, utilizam diversos tipos de estratégias e demonstram dificuldades de natureza distinta, quando resolvem situações problemáticas que potenciam a generalização. No entanto, no nosso País, há ainda necessidade de fazer investigação nesta área, já que este tipo de tarefas não são muito comuns nas aulas de Matemática. O novo Programa do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) constitui um ponto de viragem em relação aos programas que vigoraram longos anos em Portugal, no que refere à expressão curricular dos padrões. De acordo com este documento, o pensamento algébrico atravessa, de forma clara, todos os ciclos de ensino, devendo dar-se especial atenção à investigação de padrões, à identificação de relações e à generalização. Os alunos que participaram neste estudo não tiveram uma instrução muito focalizada na resolução de problemas, nem tinham experiência prévia na exploração de padrões, principalmente de natureza visual, neste sentido seria relevante estudar os resultados evidenciados por alunos com experiência na resolução deste tipo de tarefas, após a generalização das novas orientações curriculares.

Por motivações pessoais, este estudo centrou-se em alunos do 2.º ciclo do ensino básico, o que significa que todos os resultados devem ser encarados dentro deste contexto. No entanto, seria interessante estudar o modo como alunos de outros níveis de ensino resolveriam tarefas desta natureza. Que estratégias de generalização utilizariam? Que tipo de dificuldades iriam evidenciar? Quais os erros mais comuns? De que forma a visualização influenciaria o seu desempenho?

As tarefas propostas ao longo da experiência de ensino tinham algumas características comuns, nomeadamente serem propostas em contextos de natureza visual e centradas na generalização de padrões de crescimento. Apesar de serem curricularmente relevantes, não fazia parte dos objectivos deste estudo contemplar, nas tarefas, padrões como os de repetição ou padrões exclusivamente numéricos. No entanto, a pertinência deste tipo de padrões na aprendizagem da álgebra (NCTM, 2000) justifica o estudo das categorias que daqui poderiam surgir e o tipo de factores que poderiam influenciar o trabalho dos alunos nestes casos.

Parece ser incontornável que os alunos mostram uma predisposição para estabelecer generalizações de tipo construtivo em detrimento de generalizações desconstrutivas (Rivera & Becker, 2007; English & Warren, 1995; Taplin, 1995) e este facto foi evidente no presente estudo. Contudo é pertinente tentar compreender o que estará na base desta preferência. Estará relacionada com a natureza das operações envolvidas? Será antes condicionada por capacidades de natureza visual?

14.4. Limitações

No momento em que o estudo teve início e, em particular, na fase em que se procedeu à recolha bibliográfica, à construção dos materiais e ao delineamento da investigação, havia pouca informação disponível acerca do tema focado. Nos últimos quatro anos, surgiram diversos trabalhos de investigação e publicações que poderiam ter contribuído, de forma significativa, para a análise de outras perspectivas que não foram contempladas neste trabalho.

A investigadora conduziu um estudo centrado no trabalho de duas turmas que não eram suas. O facto de ser um elemento externo ao contexto educativo dos alunos em causa, poderia ter constituído uma limitação da investigação, implicando alguma inibição e perturbação na sala de aula. No entanto, como se tratou de um estudo longitudinal foi possível minimizar consideravelmente esses constrangimentos.

Apesar de a investigação ter tido a duração de um ano lectivo, proporcionando um acompanhamento prolongado dos alunos que nela participaram, uma experiência desenvolvida com os mesmos alunos, ao longo dos dois anos correspondentes ao 2.º ciclo, permitiria uma compreensão mais aprofundada do problema em estudo. Estes alunos tinham uma experiência muito reduzida com padrões e nenhuma experiência com tarefas do tipo das que foram propostas, a continuidade deste tipo de estudo permitiria, por exemplo, investigar se as características do seu trabalho se iriam manter ou não.

Neste estudo privilegiou-se uma metodologia mista, com predominância da vertente qualitativa. De forma a obter informação rica em pormenores, para dar resposta às questões de investigação, optou-se por estudar dois pares de alunos em cada uma das turmas seleccionadas. Assim, os resultados deste estudo estão directamente associados às duas turmas que nele participaram e, em particular, aos quatro pares de alunos que constituíram os estudos de caso. Atendendo a estes pressupostos, os resultados obtidos não podem ser generalizados a outros contextos, no entanto podem constituir um contributo importante para que se possa analisar a mesma temática noutros contextos, tendo por base algum conhecimento acerca da mesma.

O pré-teste e o pós-teste eram iguais o que poderia implicar um efeito de habituação nas respostas dadas no pós-teste. Tentou-se minimizar esta limitação estabelecendo um período de diferença de sete meses entre a primeira e a segunda aplicação do teste, optando ainda pelo recurso a um grupo de controlo que resolveu o pré-teste e o pós-teste nos mesmos momentos que as turmas experimentais.

REFERÊNCIAS

Abe, A. (2003). Abduction and analogy in chance discovery. In Y. Ohsawa & P. McBurney (Eds.), *Chance discovery* (pp. 231–248). New York: Springer-Verlag.

Abrantes, P., Ponte, J., Fonseca, H. & Brunheira, L. (1999). Introdução. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca, e L. Brunheira (Orgs.). *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 1-12). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: ME-DEB.

Ahmed, A. (1987). *Better Mathematics: A Curriculum Development Study*. London: HMSO.

Ainley, J. & Pratt, D. (2002). Purpose and Utility in Pedagogic Task design. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 17-24.

Alcock, L. & Simpson, A. (2002). Definitions: dealing with categories mathematically. *For the Learning of Mathematics*, 22 (2), 28–34.

Amaro. G., Cardoso, F. & Reis, P. (1994). *Terceiro Estudo Internacional de Matemática e Ciências, Relatório Internacional, Desempenho de alunos em Matemática e Ciências: 7.º e 8.º anos*. Lisboa: IIE.

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F. & Robutti, O. (1998). A model for analyzing the transition to formal proofs in geometry. In A. Olivier & K. Newstead, *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 24–31.

Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Johnson, D. & Wiliam, D. (1997). *Effective Teachers of Numeracy, Final Report*. London: Kings College.

Backhouse, J., Haggarty, L., Pirie, S. & Stratton, J. (1992). *Improving the Learning of Mathematics*. London, UK: Cassell.

Battista, M. (1980). Interrelationships between Problem Solving Ability. Righ Hemisphere Processing Facility and Mathematics Learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 2, 53-60.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). Introduction. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 3-12). Kluwer Academic: Dordrecht.

Becker, J. & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 121-128.

Bell, P. (2004). Promoting students' argument construction and collaborative debate in the science classroom. In M. Linn, E. Davis & P. Bell (Eds.), *Internet environments for science education* (pp. 115-143). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R. (1989). The role of visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*, 49-60.

Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-15.

Black, P. & Wiliam, D. (1998). *Inside the black box: raising standards through classroom assessment*. London: King's College.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.

Boero P., Garuti R. & Mariotti M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. In A. Gutierrez & L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 113-120.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: Belknap Press of Harvard University Press.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Granada: Universidad de Granada.

Cañadas, M. & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67-78.

Chapman, O. (1997). Metaphors in the teaching of mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 201-228.

Charles, R., Lester, F. & O'Daffer, P. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston: NCTM.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 359-387.

Cifarelli, V. (1997). Emergence of abductive reasoning in mathematical problem solving. Paper presented to the Special Interest Group for Research in Mathematics Education. *Annual Conference of the American Educational Research Association.* Chicago, Illinois.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Hypothetical learning trajectories. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.

Cockroft, W. (1982). *Mathematics counts*. London: Her Majesty Stationery office.

Cohen, L. & Manion, L. (1996). *Research methods in education*. London: Croom Helm.

Creswell. J. (2003) *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches*. London: Sage.

Davidov, V. (1990). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Davis, P. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática.* Lisboa: Gradiva.

De Villiers, M. (2003). *Rethinking proof with Geometer's Sketchpad 4*. Emeryville: Key Curriculum Press.

Denzin, N., Lincoln Y. (2000). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Devlin, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

DeWindt-King, A. & Goldin, G. (2003). Children's visual imagery: Aspects of cognitive representation in solving problems with fractions. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 2, 1-42.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. Bishop (Ed.), *Mathematical Knowledge: It's Growth Trough Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Dörfler, W. (2005). Diagrammatic thinking. In M. Hoffman, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and sign* (pp. 57-66). USA: Springer.

Doyle, K. (2007). The teacher, the tasks: Their role in students' mathematical literacy. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Research Group of Australasia*, 1, 246-254.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 33-48.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N. & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive Point of View. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.37-52). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1989). Spatial visualization in the Mathematics curriculum. *Focus on learning problems in Mathematics*, 11, 1.

Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *ZDM: International Journal in Mathematics Education*, 26(4), 109-113.

English, L. D. (2004). Promoting the development of young children's mathematical and analogical reasoning. In L. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 210–215). Mahwah, USA: Lawrence Erlbaum.

English, L. & Warren, E. (1995). General reasoning processes and elementary algebraic understanding: Implications for instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 17(4), 1–19.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 195-302). New York: Macmillan.

Erlandson, D., Harris, E., Skipper, B. & Allen, S. (1993). *The naturalistic inquiry: A guide to methods.* Newburry Park, CA: Sage Publications.

Fischbein, E (1987), *Intuition in Science and Mathematics: an educational approach.* Dordrecht: Reidel

Fraenkel, J. & Wallen, N. (1990). *How to Design and Evaluate Research in Education.* New York: Mc Graw-Hill, 1990.

Friel, S., Rachlin, S. & Doyle, D. (2001). *Navigating through algebra in grades 6-8*. Reston: NCTM.

Frobisher, L., Monaghan, J., Orton, A., Orton, J., Roper, T. & Threlfall, J. (1999). *Learning to Teach Number*. Cheltenham: Stanley Thornes.

Frobisher, L., Frobisher, A., Orton, A. & Orton, J. (2007). *Learning to Teach Shape and Space*. Cheltenham: Nelson Thornes.

García-Cruz, J. & Martinón, A. (1997). Actions and invariant in schemata in linear generalizing problems. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 289-296.

Goldenberg, E. P. (1996). "Habits of Mind" as an organizer for the curriculum. *Journal of Education*, 178(1), 13-34.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). System of mathematical representations and development of mathematical concepts. In F. Curcio (Ed.), *The roles of representation* *in school mathematics: 20001 yearbook*. Reston: National Council of teachers of Mathematics.

Greene, J., Caracelli, V. & Graham, W. (1989). Toward a conceptual framework for mixed-method evaluation design. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 11(3), 255-74.

Guba, E. & Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In: Denzin N. & Lincoln Y. (Eds.). *Handbook of Qualitative Research* (pp. 105-117). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. Plenary paper. In A. Gutierrez & L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 3-19.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 5-23.

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7, 27-50.

Harel, G. & Tall, D. (1991). The general, the abstract and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 11(12), 38-42.

Healy, L. & Hoyles, C. (1996). Seeing, doing and expressing: An evaluation of task sequences for supporting algebraic thinking. In A. Gutierrez & L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 67-74.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 70-95). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R., Parzysz, B & Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. Bishop (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 161 – 204). Londres: Kluwer.

Hierbert, J. & Wearne, D. (1993). Instruction tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal*, 30, 393-425.

Johnson-Laird, P. & Byrne, R. (1993) Precis of Deduction. *Behavioral and Brain Sciences,* 16, 323-333.

Johnson, R. & Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher,* 33(7), 14-26.

Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kenney, P., Zawojewski, J. & Silver, E. (1998). Marcy's Dot Problem. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(7), 474-477.

Kent, L. B. (2000). Connecting Integers of Meaningful Context. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6 (1), 62-66.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 1-15). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Klauer, K. (1999). Fostering higher order reasoning skills: the case of inductive reasoning. In J. Hamers, J. Van Luit & B. Csapó (Eds.), *Teaching and learning thinking skills* (pp. 131-155). Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Krutetskii, V. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Laborde, C. (1993). The Computer as Part of the Learning Environment: The Case of Geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, (pp. 48-67). Berlin and Heidelberg: NATO ASI Series, Springer-Verlag.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3-28.

Lean, G. & Clements, M. (1981). Spatial Ability, Visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*. 12(3), 267-299.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.) *Problems in representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 40-77). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lester, F. K. (1980). Research in mathematical problem solving. In R. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 286-323). Reston: NCTM.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number patter: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26(3), 24-42.

Lobato, J., Ellis, A.B., & Muñoz, R. (2003). How “focusing phenomena” in the instructional environment afford students’ generalizations. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(3), 1-36.

Lincoln, Y. & Guba, E. (2000). Paradigmatic Controversies, Contradictions, and Emerging Confluences. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp 163-188). Thousand Oaks CA: Sage Publications.

Magnani, L. (2005). An abductive theory of scientific reasoning. *Semiotica*, 153(1–4), 261–286.

Mancosu, P. (2005). Mathematical reasoning and visualization: Visualization in logic and mathematics. In J. Mancosu & S. Pedersen (Eds.), *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics* (pp. 13-30). Dordrecht: Springer.

Mariotti, A. (1995). Images and concepts in geometrical resoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education*, (p. 97-116). New York: Springer.

Martin, W. & Harel G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 41-51.

Marx, R. & Walsh, J. (1988). Learning from academic tasks. *Elementary School Journal*, 88, 207-219.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65 – 86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Mason, J. (2002). *Researching Your own Practice: The Discipline of Noticing*. London: Routledge Falmer.

Mason, J., Johnston-Wilder, S. & Graham, A. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: Sage (Paul Chapman).

McMillan, J. & Schumacher, S. (2001). *Research in Education: A Conceptual Introduction*. New York: Longman.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. S. Francisco, CA: Jossey Bass.

Mertens, D. (1998). *Research Methods in Education and Psychology. Integrating Diversity with Quantitative & Qualitative Approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

ME-DEB (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: ME-DEB.

ME-DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais.* Lisboa: ME-DEB.

ME-DGEBS (1990). Reforma Educativa – Programa do 1.º Ciclo. Lisboa: DGEBS.

ME-DGEBS (1991a). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (2.º ciclo do ensino básico Vol. II*). Lisboa: INCM.

ME-DGEBS (1991b). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3.º ciclo do ensino básico).* Lisboa: INCM.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Miles, M. & Huberman, A. (1994). *Qualitative data analysis*. Newbury Park, CA: Sage Publications.

Moyer-Packenham, P. (2005). Using virtual manipulatives to investigate patterns and generate rules in algebra. *Teaching Children Mathematics,* 11(8), 437-444.

Mulligan, J.T., Prescott, A. & Mitchelmore, M. C. (2004). Children's development of structure in early mathematics. In M. Høines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3,* 393-401.

NCTM (1980). *An agenda for action: recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston: NCTM.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM (2006). *Curriculum Focal Points for Kindergarten Through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence*. Reston: NCTM.

Neubert, G. & Binko, J. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washington, DC: National Education Association.

Nickson, M. (2000). *Teaching and learning mathematics: A teacher's guide to recent research and its application*. New York: Cassell.

Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The Construction of Mathematical Meanings: Connecting the Visual with the Symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 203-233.

NRC (1989). *Everybody counts*. Washington DC: National Academy Press.

NRC (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

OCDE (2004). *PISA 2003: Relatório Internacional, O rendimento dos alunos em Matemática.* Lisboa: Santillana-Constância.

Orton, A. (1999). Preface. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. vii-viii). London: Cassell.

Orton, A. & Orton , J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp 104-120). London: Cassell.

Palhares, P. (2000). *Transição do Pré-Escolar para o 1.º Ano de Escolaridade: Análise do Ensino e das Aprendizagens em Matemática*. (Tese de Doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Palhares, P. e Mamede, E. (2002). Os padrões na matemática do pré-escolar. *Educare-Educere*, 10,107-123.

Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Pedemonte, B. (2001). Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 33–40.

Pedhzzur, E. & Schmelkin, L. (1991). *Measurement, design, and analysis: An integrated approach*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers

Piaget, J. & Inhelder, B. (1971). *Mental Imagery and the Child*. New York: Basic Books.

Peirce, C. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Polya, G. (1945). *How to solve it: a New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1965). *Mathematical Discovery*. New York: Wiley

Ponte, J., Boavida, A., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Presmeg. N. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 6(3), 42-46.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205–235). Dordrecht: Sense Publishers.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 1-21.

Radford, L. (2008). Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns in Different Context. *ZDM: International Journal in Mathematics Education*, 40(1), 83-96, 2008.

Ramalho, G. (1994). *As nossas crianças e a Matemática. Caracterização da participação dos alunos portugueses no "Second International Assessment of Educational Progress"*. Lisboa: DEPGEF.

Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D., Smith, N. & Suydam, M. (2001). *Helping children learn mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Rival, I. (1987). Picture puzzling: mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasoning. *The Sciences*, 27, 40–46.

Rivera, F. (2007). Visualizing as a Mathematical Way of Knowing: Understanding Figural Generalization. *Mathematics Teacher*, 101(1), 69-75.

Rivera, F. & Becker, J. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behaviour*, 26(2), 140-155

Rivera, F. (2008). On the pitfalls of abduction: Complicities and complexities in patterning activity. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 17-25.

Rivera, F. & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM: International Journal in Mathematics Education*, 40, 65-82.

Romberg, T., Fennema, E. & Carpenter, T. (Eds.) (1993). *Integrating research on the graphical representation of functions.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rustigian, A. (1976). *The ontogeny of pattern recognition: significance of colour and form in linear pattern recognition among young children*. Unpublished PhD thesis, University of Connecticut.

Sáenz-Ludlow, A. (1997). Inferential processes in Michael's mathematical thinking. In E. Pehkonnen (Ed.), *Proceedings of the 21th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, 4, 169–176.

Sasman, M., Olivier, A. & Linchevski, L. (1999). Factors influencing students' generalization thinking processes. In O. Zaslavski (Ed.), *Proceedings of the 23th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, 4, 161-168.

Sawyer, W. (1955). *Prelude to Mathematics*. Harmondsworth: Penguin.

Scandura, J. (1971). *Mathematics: Concrete behavioural foundations*. New York: Harper & Row Publishers.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and making sense in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). NY: Macmillan Publishing Co.

Schoenfeld, A., Smith, J. & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. In R. Glaser (Ed.), *Advances in Instructional Psychology* (pp. 55-175). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Shaffer, D. & Serlin, R. (2004). What good are statistics that don't generalize? *Educational Researcher*, 33(9), 14-25.

Shama, G. & Dreyfus, T. (1994). Visual, Algebraic and Mixed strategies in visually presented linear programming problems. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 45-70.

Siemon, D. & Booker, G. (1990). Teaching and learning for, about and through problem solving. *Vinculum,* 27(2), 4-12.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(2), 114-145.

Simon, M. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematics Thinking and Learning,* 682, 91-104.

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136-150). Reston: NCTM.

Smith, M. & Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 344–350.

Speiser, B. & Walter, C. (1997). Performing algebra: Emergent discourse in a fifth grade classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 39-49.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics,* 20(2), 147-164.

Stacey, K. & MacGregor, M. (1995). The influence of problem representation on algebraic equation writing and solution strategies. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, 2, 90-97.

Stake, R. (1994). Case studies. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). Thousand Oaks: Sage Publications.

Steele, D. (2008). Seventh-grade students' representations for pictorial growth and change problems. *ZDM: International Journal in Mathematics Education,* 40, 97-110.

Steen, L. (1988). The Science of Patterns, *Science,* 240, 611-616.

Stein, M. & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation,* 2, 50-80.

Stein, M. & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268-275.

Stein, M., Smith, M., Henningsen, M. & Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development.* New York: Teachers College Press.

Sternberg, R. & Gardner, M. (1983). Unities in inductive reasoning. *Journal of Experimental Psychology: General*, 112, 80-116.

Stylianou, D. & Silver, E. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning,* 6(4), 353-387.

Swafford, J. & Langrall, C. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 89–112.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers: The Netherlands.

Taplin, M. (1995). Spacial patterning: A pilot study of pattern formation and generalisation. In L. Meira & D. Carraher (Eds), *Proceedings of the 19th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, 3, 42-49.

Tashakkori, A. & Teddlie, C. (2003). The past and future of mixed methods research: From data triangulation to mixed model designs. In A. Tashakkori & C. Teddlie (Eds.), *Handbook on mixed methods in the behavioral and social sciences* (pp. 671-701). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

Thornton, S. (2001). *A Picture is Worth a Thousand Words.* In http://math.unipa.it/~grim/AThornton251.PDF.

Tripathi, P. (2008). Developing Mathematical understanding through multiple representation. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 13(8), 438-445.

Usiskin, Z. (1996). Mathematics as a Language. *Communication in Mathematics K-12 and Beyond*: *Yearbook 1996* (pp 231-243). Reston: NCTM.

Vale, I. (2000). *Didáctica da Matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e de materiais manipuláveis*. Dissertação de Doutoramento. Aveiro: Universidade de Aveiro – Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa

Vale, I & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática*, 85, 14-20.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I. & Borralho, A. (2006). Os padrões no ensino aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 193-213). Lisboa: SPCE.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática: propostas curriculares para o ensino básico.* Viana do Castelo: ESEVC.

Vale, I. (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. *Actas do Seminário de Investigação em Educação Matemática*: APM (no prelo).

Van Boxtel, C., Van der Linden, J., & Kanselaar & G. (2000). Collaborative learning tasks and the elaboration of conceptual knowledge. *Learning and Instruction, 10*, 311-330.

Van de Walle, J. (2003). *Designing and selecting problem-based tasks*. In F. Lester (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving prekindergarten-grades 6* (pp. 67-80). Reston, VA: NCTM.

Von Glasersfeld, E. (1987). Preliminaries to any Theory of Representation. In C. Janvier (Ed), *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics* (pp 215-225). Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

Warren, E. (2000). Visualisation and the development of early understanding in algebra. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 273-280.

Warren, E. & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(1), 9-14.

Warren, E. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 171-185.

Watson, A. (2008). How secondary teachers structure the subject matter of mathematics. In M. Joubert (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 28, 126-131.

Woleck, K., (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 215- 227). Reston: NCTM.

Yin, R. (1989). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. ArtMed: Porto Alegre.

Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education.* 27(4), 435-457.

Zazkis, R. (2001). From arithmetic to algebra via big numbers. In H. Chick, K. Stacey, Jill Vincent & John Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra*, 2, 676–681.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics*, 49, 379-402.

Zazkis, R., Liljedahl, P. & Chernoff, E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM: International Journal in Mathematics Education*, 40, 131-141.

Zemelman, S., Daniels, H. & Hyde, A. (1998). *Best practice: New standards for teaching and learning in America's schools*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Zevenbergen, R. (2001). Mathematics, social class, and linguistic capital: An analysis of mathematics classroom interactions. In B. Nebres (Ed.), *Sociocultural research on mathematics education* (pp. 201-215). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Zevenbergen, R., Dole, S. & Wright, R. (2004). *Teaching mathematics in primary schools.* Crows Nest, NSW: Allen & Unwin.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Introduction: What is Mathematical Visualization? In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp 1-7). Washington: MAA.

ANEXOS

ANEXO A

Teste de avaliação de desempenho

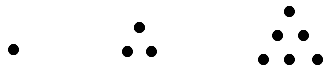
<u>**Instruções para a realização do teste**</u>**:**

- **Lê cada uma das questões atentamente e responde na própria folha.**
- **O teste deve ser realizado a tinta azul ou preta.**
- **Apresenta todo o teu trabalho (podes explicar o teu raciocínio por meio de cálculos, palavras ou desenhos).**
- **A duração do teste é de 45 minutos.**

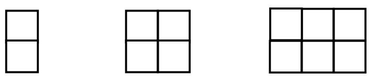
Escola: ____

Nome do aluno: ____

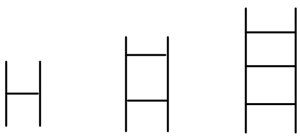
1. Continua as sequências indicando os **dois** termos seguintes:

1.1. 

1.2. 2, 5, 8, 11, 14

1.3. 

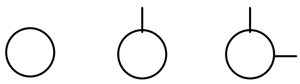
1.4. ☺ ♡ ◎ ☺☺ ♡♡ ◎◎

1.5. 

1.6. 1, 4, 9, 16

1.7. ⇧ ⇨ ⇩ ⇦ ⇧

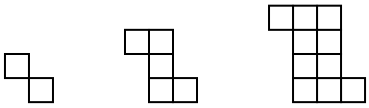
1.8. A B A BB A BBB

1.9. 

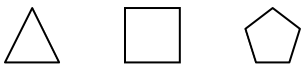
1.10. △ □ ○ △ □ ○

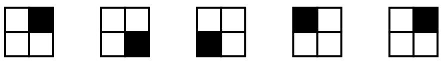
1.11. 160, 80, 40, 20

1.12. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$

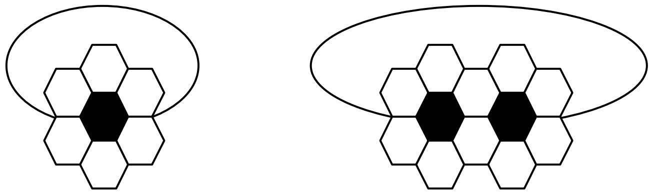
1.13. 

1.14. 1   22   333

1.15. 

1.16. 

2. A Joana tem como passatempo fazer colares de missangas usando flores como motivo. Ela utiliza missangas brancas para as pétalas e missangas pretas para o centro de cada flor. A figura mostra um colar com uma flor e um colar com duas flores.

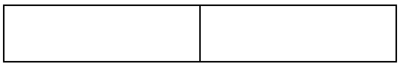


2.1. De quantas missangas brancas e pretas precisa a Joana para fazer um colar com 3 flores? **Explica como chegaste a essa conclusão**.

2.2. De quantas missangas brancas e pretas precisa a Joana para fazer um colar com 8 flores? **Explica o teu raciocínio**.

2.3. Se a Joana fizer um colar com 25 flores de quantas missangas de cada cor vai precisar? **Explica o teu raciocínio**.

3. Na figura que a seguir se apresenta é possível contar 3 rectângulos.



Considera agora a seguinte figura:

3.1. Qual é o número total de rectângulos, de qualquer tamanho, que consegues contar? **Explica o teu raciocínio**.

3.2. E se a figura fosse constituída por 10 rectângulos iguais, qual seria o número total de rectângulos, de qualquer tamanho, que conseguirias identificar? **Explica como pensaste**.

ANEXO B

Escala de avaliação do teste

Escala de avaliação do teste

Questão	Pontuação
1.	0 pontos – Não responde. Continua a sequência incorrectamente. 1 ponto – Indica um termo da sequência mas nenhum dos pretendidos. Interpreta a sequência como um padrão de repetição quando é de crescimento. 2 pontos – Indica dois termos da sequência mas nenhum dos pretendidos. 3 pontos – Indica um dos termos da sequência correctamente e o outro não. Indica apenas o termo seguinte da sequência. Considera que a variação se repete. 4 pontos – Responde correctamente à questão. Continua a sequência correctamente mas indica mais termos do que apenas os dois seguintes.
2.1	0 pontos – Não responde. Responde incorrectamente sem apresentar qualquer trabalho. Responde incorrectamente utilizando estratégias de resolução desadequadas. 1 ponto - Limita-se a responder, ainda que correctamente, sem apresentar o raciocínio. O raciocínio tem por base uma estratégia que não se adequa totalmente ao cálculo do número de missangas. 2 pontos – Recorre a uma estratégia que embora seja adequada não se revela eficiente. 3 pontos – O raciocínio tem por base uma estratégia adequada mas não é totalmente claro. 4 pontos – Determina correctamente o número de missangas utilizando estratégias de resolução adequadas.
2.2	0 pontos – Não responde Responde incorrectamente sem apresentar qualquer trabalho. Responde incorrectamente utilizando estratégias de resolução desadequadas. Limita-se a responder, ainda que correctamente, sem apresentar o raciocínio. 1 ponto – O raciocínio tem por base uma estratégia que não se adequa totalmente ao cálculo do número de missangas.

	2 pontos – Recorre a uma estratégia que embora seja adequada não se revela eficiente. 3 pontos – O raciocínio tem por base uma estratégia adequada mas não é totalmente claro. 4 pontos – Determina correctamente o número de missangas utilizando estratégias de resolução adequadas.
2.3	0 pontos – Não responde Responde incorrectamente sem apresentar qualquer trabalho. Responde incorrectamente utilizando estratégias de resolução desadequadas. Limita-se a responder, ainda que correctamente, sem apresentar o raciocínio. 1 ponto – O raciocínio tem por base uma estratégia que não se adequa totalmente ao cálculo do número de missangas. 2 pontos – Recorre a uma estratégia que embora seja adequada não se revela eficiente. 3 pontos – O raciocínio tem por base uma estratégia adequada mas não é totalmente claro. 4 pontos – Determina correctamente o número de missangas utilizando estratégias de resolução adequadas.
3.1	0 pontos – Não responde Responde incorrectamente sem apresentar qualquer trabalho. Responde incorrectamente utilizando estratégias de resolução desadequadas. Limita-se a responder, ainda que correctamente, sem apresentar o raciocínio. 1 ponto – Identifica apenas os 5 rectângulos de menor dimensão. Identifica apenas os 5 rectângulos de menor dimensão e o de maior dimensão. 2 pontos – Identifica rectângulos de diferentes dimensões mas não contabiliza todos os casos. 3 pontos – Responde correctamente ao problema mas não revela um raciocínio organizado. 4 pontos – Responde correctamente ao problema e revela um raciocínio organizado.

3.2 0 pontos – Não responde

Responde incorrectamente sem apresentar qualquer trabalho.

Responde incorrectamente utilizando estratégias de resolução desadequadas.

Limita-se a responder, ainda que correctamente, sem apresentar o raciocínio.

1 ponto – Identifica apenas os 10 rectângulos de menor dimensão.

Identifica apenas os 10 rectângulos de menor dimensão e o de maior dimensão.

2 pontos – Identifica rectângulos de diferentes dimensões mas não contabiliza todos os casos.

3 pontos – Responde correctamente ao problema mas não revela um raciocínio organizado.

4 pontos – Responde correctamente ao problema e revela um raciocínio organizado.

ANEXO C

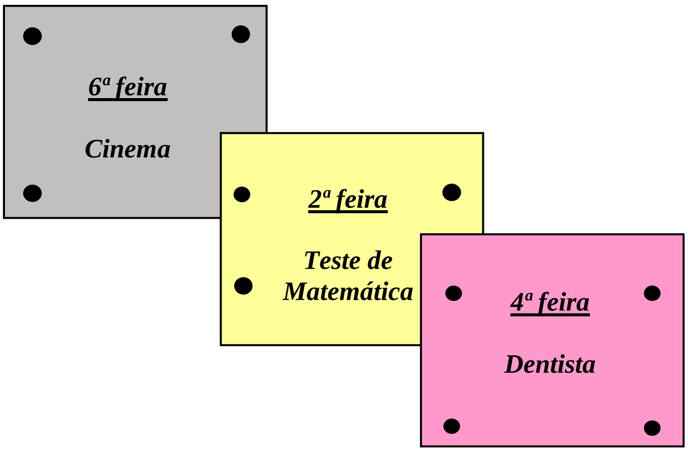
Tarefa 1

Tarefa 1

Os lembretes da Joana

Em cada alínea desta tarefa deves explicar detalhadamente o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Para não se esquecer dos seus compromissos, a Joana pendura lembretes no placar do quarto, colocando *pioneses* como mostra a figura.



Se a Joana continuar a pendurar os seus lembretes desta forma:

1. De quantos *pioneses* precisará para colocar no seu placar 6 lembretes?

2. E se quiser pendurar 35 lembretes, de quantos *pioneses* precisará?

3. Sabendo que a Joana comprou uma caixa de 600 *pioneses*, quantos lembretes poderá pendurar, no máximo, no seu placar?

4. A Joana decidiu utilizar cartões triangulares para registar os seus compromissos. Sabendo que em cada vértice de um triângulo utiliza um *pionés* e que dois triângulos têm um *pionés* em comum, estuda as alíneas anteriores para este caso.

ANEXO D

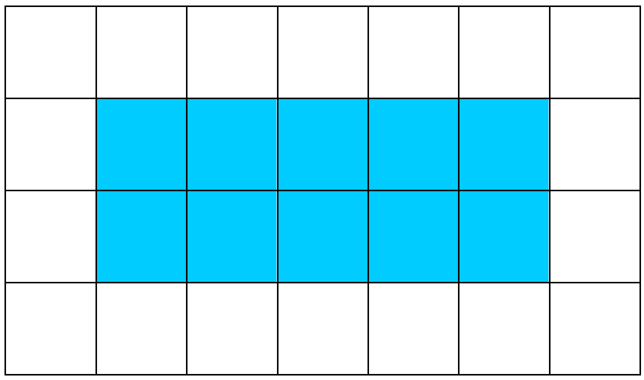
Tarefa 2

Tarefa 2

Piscinas

Em cada alínea deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

A empresa *Queda d'Água* constrói piscinas de fundo rectangular. Na construção de cada piscina são utilizados azulejos azuis, para o fundo, e azulejos brancos, para colocar no bordo. A figura ilustra uma piscina de dimensões 7×4 construída pela empresa *Queda d'Água*.



1.4. **1.** Determina o número de azulejos de cada cor para uma piscina de dimensões 10×6.

2. Supõe agora que a empresa construiu uma piscina de dimensões 30×90.

2.1. Propõe uma expressão numérica que permita calcular o número de azulejos azuis necessários à construção dessa piscina. Explica como chegaste a essa expressão.

2.2. Propõe agora uma expressão numérica para determinar o número de azulejos brancos existentes na piscina considerada. Explica como chegaste a essa expressão.

3. Imagina que a empresa dispõe de 300 azulejos azuis para construir a piscina de um cliente. Sabendo que este pretende uma piscina **quadrangular**, determina as **dimensões máximas** dessa piscina e o número de azulejos de cada tipo necessários à sua construção.

ANEXO E

Tarefa 3

Tarefa 3

Sequência de números

Em cada alínea deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Considera a seguinte distribuição numérica:

	1	2	3	4
8	7	6	5	
	9	10	11	12
16	15	14	13	
	17	18	19	20
...				

1. Continua a sequência por mais duas linhas.

2. Explica a regra que te permitiu continuar a sequência na alínea anterior.

3. Investiga relações entre os números da sequência apresentada. Regista as tuas descobertas.

4. Em que posição aparecerá o número 40 na sequência dada?

5. Localiza, na sequência, a posição ocupada pelo número 81. E o número 542, onde figurará na sequência?

ANEXO F

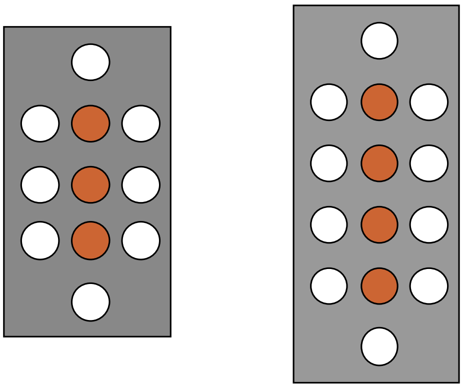
Tarefa 4

<u>Tarefa 4</u>

A Pizzaria

Em cada alínea deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

As figuras mostram duas mesas da Pizzaria *Sole Mio*, uma com 8 pessoas e 3 pizzas e outra com 10 pessoas e 4 pizzas.



1. Sabendo que numa das mesas foram colocadas 10 pizzas quantas pessoas estariam sentadas?

2. E se fossem 31 pizzas? Quantas pessoas estariam, sentadas nessa mesa?

3. O João decidiu comemorar o seu aniversário neste restaurante e convidou 57 pessoas. Quantas pizzas terá de encomendar para a sua mesa?

4. As pizzas devem ser partilhadas pelas pessoas de cada mesa. Sabendo que o João adora pizza, ajuda-o a resolver os seguintes problemas:

4.1. Se ele distribuir os seus convidados por mesas de 8 e 10 pessoas, como as que vês nas figuras, qual a mesa que o João deveria escolher de forma a comer maior quantidade de pizza?

4.2. Achas que o João deve convidar mais ou menos pessoas, de forma a comer maior quantidade de pizza? (Sugestão: experimenta para alguns).

ANEXO G

Tarefa 5

Tarefa 5

Dobragens

Em cada alínea deves explicar detalhadamente o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Para resolver esta tarefa vais utilizar uma folha de jornal. Segue as instruções indicadas em cada uma das alíneas e regista as tuas descobertas.

1. Dobra a folha de jornal a meio. Em seguida dobra-a novamente a meio. Repete o processo mais uma vez. Em quantas partes iguais ficará dividida a folha depois de a abrires? Explica a tua previsão e confirma o resultado abrindo a folha.
2. E se dobrasses a folha a meio 7 vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida? Explica o teu raciocínio.
3. Consegues encontrar uma relação entre o número de dobragens efectuadas e o número de partes iguais em que a folha fica dividida? Explica como pensaste.
4. Para a folha ficar dividida em 1024 partes iguais quantas dobragens terias de fazer?
5. Tomando a folha de jornal como unidade de área, determina a área de cada uma das partes obtidas nas questões **1** e **2**.

ANEXO H

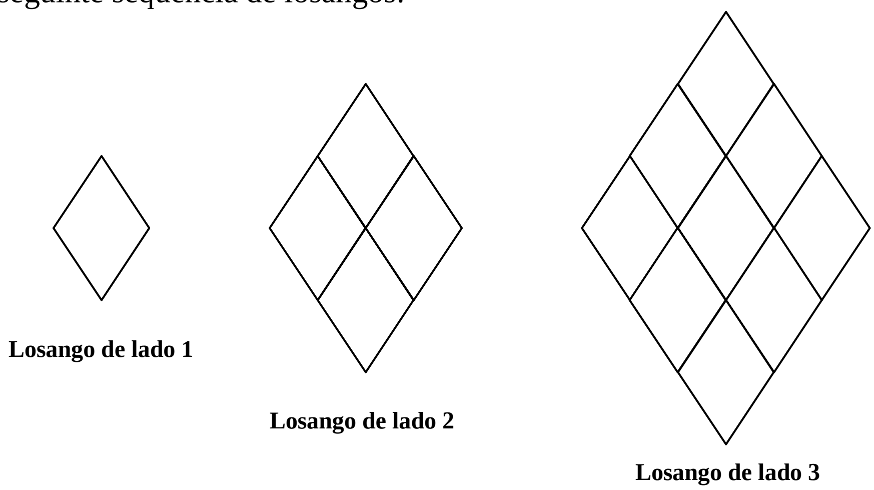
Tarefa 6

Tarefa 6

Sequências com losangos

Em cada alínea deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Considera a seguinte sequência de losangos:



Sabendo que são utilizadas peças de lado 1 (o mesmo que losangos de lado 1) na construção de qualquer losango da sequência dada:

1. Quantas peças são necessárias para construir um losango:

   1.1. De lado 4?

   1.2. E um de lado 50?

2. Supondo que foram utilizadas 324 peças na construção de um dado losango da sequência, determina o seu perímetro.

3. Se o lado de um losango for o triplo de outro como se relacionam:

   3.1. Os perímetros das duas figuras?

   3.2. As áreas das duas figuras? (considera para unidade de área a peça de lado1).

   Escreve uma regra para cada alínea da questão **3**.

ANEXO I

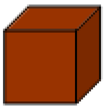
Tarefa 7

Tarefa 7

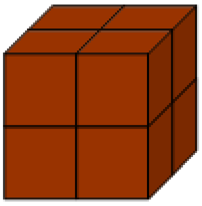
Cubos de chocolate

Em cada alínea deves explicar detalhadamente o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Na chocolataria *Chocobom* vendem cubinhos com cobertura de chocolate. Como esta especialidade é muito procurada decidiram fazer cubos de caramelo de várias dimensões, construídos a partir dos mais pequenos, mergulhando-os posteriormente em chocolate, como mostra a figura.



Cubo de aresta 1



Cubo de aresta 2

1. O João comprou na *Chocobom* um cubo de aresta 3 que decidiu partilhar com os seus amigos. Para isso teve que desmanchar o cubo, mas reparou que nem todos tinham o mesmo número de faces com chocolate. Descobre quantos cubinhos têm 1 única face de chocolate. E quantos têm 2 faces cobertas de chocolate? E 3? E nenhuma?
2. Experimenta agora com cubos de outras dimensões. Descobre quantos cubinhos teriam 1 só face de chocolate. E quantos teriam 2 faces de chocolate? E 3? E nenhuma?
3. Explica como poderias determinar quantos cubinhos teriam 1, 2, 3 e nenhuma faces de chocolate, num cubo de aresta 10.

   Sugestão: Organiza numa tabela a informação obtida nas alíneas anteriores.

ANEXO J

Categorias de Análise

Categorias de Análise

Categorias de análise			Descrição	Referências
	Contagem (C)		Desenhar uma figura e contar os seus elementos.	
		Sem ajuste (TU_1)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.	
	Termo unidade	Com ajuste numérico (TU_2)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.	
		Com ajuste contextual (TU_3)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.	Adaptado de Lannin, 2005; Lannin, Barker & Townsend 2006; Becker & Rivera, 2005; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999; Stacey, 1989
		Recursiva (D_1)	Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.	
Estratégias de generalização	Diferença	Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Usar a diferença entre termos consecutivos como factor multiplicativo, sem ajustar o resultado.	
		Múltiplo da diferença com ajuste (D_3)	Usar a diferença entre termos consecutivos como factor multiplicativo. É feito um ajuste do resultado.	
	Explícita (E)		Descobrir uma regra, com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.	
	Tentativa e erro (TE)		Adivinhar uma regra fazendo sucessivas tentativas com diferentes valores. Ou Conhecida uma regra, experimentar sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas.	
Natureza das estratégias	Visuais (C, TU_3, D_3, E)		A figura desempenha um papel essencial na descoberta do invariante.	García-Cruz & Martinón, 1999; Presmeg 1986
	Não visuais (TU_1, TU_2, D_1, D_2,TE)		O trabalho é desenvolvido num contexto numérico. A sequência numérica está subjacente ao raciocínio.	

Tipo de generalização	Generalização próxima		Quando é possível determinar rapidamente um termo da sequência recursivamente ou usando desenhos.	Stacey, 1989
	Generalização distante		Implica a descoberta de uma regra geral.	
Natureza da generalização	Generalização construtiva		A regra surge da identificação de elementos disjuntos que são conjugados de forma a construir a figura inicial.	Rivera & Becker, 2008
	Generalização desconstrutiva		A regra surge da identificação de subconfigurações que se sobrepõem, implicando a subtracção desses elementos.	
Nível de generalização	*Indução simples*		A generalização não resulta da identificação de padrões mas de palpites.	Radford, 2008
	Generalização aritmética		Permite determinar alguns termos da sequência mas não uma regra.	
	Generalização algébrica	Factual	O foco da generalização mantém-se no plano concreto.	
		Contextual	A generalização é descritiva sendo utilizadas referências ao contexto.	
		Simbólica	A generalização é descrita em notação algébrica.	
Estrutura das figuras	Transparentes		A regra está subjacente de forma clara na estrutura das figuras da sequência.	Sasman, Olivier & Linchevski, 1999
	Não transparentes		A regra não é facilmente descoberta através da mera observação das figuras da sequência.	
Características dos valores atribuídos às variáveis	Números apelativos		Múltiplos de termos conhecidos da sequência.	Sasman, Olivier & Linchevski, 1999
	Números não apelativos		Números que não são múltiplos de termos conhecidos da sequência.	

ANEXO K

Guião de observação de aulas

Guião de Observação

Data:

Tarefa:

Descrição da sessão
Instruções e questões da investigadora/professor: **Reacções dos alunos à tarefa:**   **Comentários dos alunos:**   **Estratégias utilizadas:**

Dificuldades sentidas: **Aspectos a salientar dos alunos-caso:**   **Episódios marcantes durante a sessão:**
Reflexão após a sessão

ANEXO L

Inquérito aos alunos

Inquérito

Nome:____

Data de nascimento:____________________

Profissão do Pai:__________________Habilitações académicas do Pai:_____________

Profissão da Mãe:________________Habilitações académicas da Mãe:______________

Actividades extra-curriculares:____

Disciplinas preferidas:____

Porquê? ____

O que mais gostas de fazer nas aulas de Matemática? Porquê?

____

____

____

O que menos gostas de fazer nas aulas de Matemática? Porquê?

____

____

____

ANEXO M

Autorizações

Exmº(ª) Sr.(ª) Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a)

____

Ano: ____ Turma: ____ N.º: ____

No âmbito do curso de Doutoramento em Estudos da Criança, na área da Matemática Elementar, que frequento na Universidade do Minho, encontro-me a desenvolver um trabalho de investigação que tem como objectivo reflectir sobre a aprendizagem da Matemática, num contexto de resolução de problemas, tentando identificar estratégias que invertam o actual quadro de insucesso nesta disciplina.

A investigação terá lugar no final do ano lectivo 2005/2006 e no decorrer do ano lectivo 2006/2007. No final do corrente ano lectivo, será passado um teste que visa avaliar as competências dos alunos na resolução de problemas envolvendo padrões e um questionário que focará as suas concepções acerca da Matemática e da resolução de problemas. No ano lectivo seguinte, serão propostas tarefas que os alunos resolverão em pequenos grupos de 2 ou 3, sendo estas sessões registadas em vídeo.

Para a concretização do referido trabalho será necessário:

- Realizar entrevistas a alguns grupos de trabalho, onde serão promovidas discussões que envolverão directamente a opinião dos alunos e nas quais terão a oportunidade de resolver actividades, com o propósito de expressar o seu raciocínio. Todas as entrevistas serão gravadas em vídeo e posteriormente transcritas e analisadas;

- No final de cada tarefa, será pedido aos alunos que elaborem um relatório, em grupo, que visa a comunicação do raciocínio utilizado na resolução do trabalho proposto. Estas produções escritas serão recolhidas e analisadas.

Assim sendo, venho por este meio solicitar que me autorize a implementar a investigação anteriormente descrita, ficando desde já garantido que as aulas decorrerão de acordo com a planificação elaborada pelo(a) professor(a) de Matemática, bem como o anonimato dos alunos.

Agradecendo a colaboração de V. Ex.ª, solicito que assine a declaração em baixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

Com os melhores cumprimentos

Viana do Castelo, ____ de ______________de 2006

____

(Ana Cristina Coelho Barbosa)

- -

Declaro que autorizo o meu educando _______________________________________ a participar da investigação conduzida pela Dr.ª Ana Barbosa, no âmbito da elaboração da sua tese de Doutoramento.

_____ / ____ / ____ Assinatura:____

Exmº Sr. Presidente do Conselho Executivo da Escola
____

No âmbito do curso de Doutoramento em Estudos da Criança, na área da Matemática Elementar, que frequento na Universidade do Minho, encontro-me a desenvolver um trabalho de investigação que tem como objectivo reflectir sobre a aprendizagem da Matemática, num contexto de resolução de problemas, tentando identificar estratégias que invertam o actual quadro de insucesso nesta disciplina.
A investigação terá lugar no final do ano lectivo 2005/2006 e no decorrer do ano lectivo 2006/2007. No final do corrente ano lectivo, será passado um teste que visa avaliar as competências dos alunos na resolução de problemas envolvendo padrões e um questionário que focará as suas concepções acerca da Matemática e da resolução de problemas. No ano lectivo seguinte, serão propostas tarefas que os alunos resolverão em pequenos grupos de 2 ou 3, sendo estas sessões registadas em vídeo.
Para a concretização do referido trabalho será necessário:

- Realizar entrevistas a alguns grupos de trabalho, onde serão promovidas discussões que envolverão directamente a opinião dos alunos e nas quais terão a oportunidade de resolver actividades, com o propósito de expressar o seu raciocínio. Todas as entrevistas serão gravadas em vídeo e posteriormente transcritas e analisadas;

- No final de cada tarefa, será pedido aos alunos que elaborem um relatório, em grupo, que visa a comunicação do raciocínio utilizado na resolução do trabalho proposto. Estas produções escritas serão recolhidas e analisadas.

Assim sendo, venho por este meio solicitar que me autorize a implementar a investigação anteriormente descrita, ficando desde já garantido que as aulas decorrerão de acordo com a planificação elaborada pelo(a) professor(a) de Matemática, bem como o anonimato dos alunos.

Agradecendo a colaboração de V. Ex.ª, solicito que assine a declaração que permite a realização deste trabalho de investigação na sua Escola.

Com os melhores cumprimentos

Viana do Castelo, ____ de ______________de 2006

____

(Ana Cristina Coelho Barbosa)

- -

Declaro que autorizo a realização da investigação conduzida pela Dr.ª Ana Barbosa, no âmbito da elaboração da sua tese de Doutoramento, na Escola
____

Assinatura:____ _____ / ____ / ____

(Presidente do Conselho Executivo)